Méthodes variationnelles appliquées à l'étude de modèles discrets en endommagement brutal

Elise BONHOMME, Université Libre de Bruxelles - Bruxelles

Dans cet exposé, je présenterai un modèle de la mécanique de l'endommagement brutal introduit par Francfort et Marigo [1]. L'objectif est d'étudier ce modèle dans différents régimes où la zone endommagée se concentre sur des ensembles de mesure nulle, et à identifier les modèles limites effectifs obtenus par analyse asymptotique basée sur la Γ-convergence des énergies totales, dans un cadre statique et discret en espace. Plus précisément, dans le contexte de l'endommagement brutal, nous considérons un matériau linéairement élastique dont la configuration de référence est $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, composé de deux phases pures : une phase endommagée dont les propriétés élastiques sont affaiblies, et une phase saine. Les propriétés élastiques des régions endommagée et saine sont décrites par leurs tenseurs d'élasticité $\mathbf{A}_0 < \mathbf{A}_1$ respectivement. En introduisant la fonction caractéristique de la zone endommagée $\chi \in L^\infty(\Omega; \{0,1\})$, le modèle de Francfort-Marigo consiste à définir l'énergie totale associée à un champ de déplacements $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ comme la somme de l'énergie élastique et d'une énergie de dissipation :

$$\mathcal{E}(u,\chi) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\chi \mathbf{A}_0 + (1-\chi)\mathbf{A}_1)\, e(u) : e(u)\, dx + \kappa \int_\Omega \chi\, dx,$$

où $e(u) = \frac{\nabla u + \nabla u^T}{2}$ est le tenseur des déformations linéarisées et $\kappa > 0$ est la ténacité du matériau. Autrement dit, le coût à payer pour avoir endommagé une partie du matériau est proportionnel au volume de la zone endommagée. Ici, nous nous intéressons au comportement asymptotique de telles énergies dans des régimes où la zone endommagée est "petite", dans un cadre discret en espace en dimension 2. Nous introduisons des petits paramètres $\eta_\varepsilon > 0$ et $\varepsilon > 0$ dans la définition de l'énergie totale et nous restreignons l'ensemble des couples admissibles $(u,\chi) \in X_{h_\varepsilon}(\Omega)$ aux déplacements continus affines par morceaux et aux fonctions caractéristiques constantes par morceaux, adaptés à une triangulation commune du domaine, dont les côtés des triangles sont de longueur de l'ordre de h_ε. Les énergies d'endommagement brutal que nous considérons sont donc de la forme

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u,\chi) = \frac{1}{2}\int_\Omega \big(\eta_\varepsilon \chi \mathbf{A}_0 + (1-\chi)\mathbf{A}_1\big) e(u) : e(u)\, dx + \frac{\kappa}{\varepsilon}\int_\Omega \chi\, dx \quad \text{si } (u,\chi) \in X_{h_\varepsilon}(\Omega),$$

de sorte que les propriétés élastiques de l'état endommagé, $\eta_\varepsilon \mathbf{A}_0$, dégénèrent vers 0 tandis que le caractère divergent de la ténacité $\kappa/\varepsilon \to +\infty$ force la zone endommagée à se concentrer sur des ensembles Lebesgue-négligeables. Dans cet exposé, je présenterai les différents modèles mécaniques obtenus asymptotiquement selon les taux de convergence $\alpha = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\eta_\varepsilon}{\varepsilon} \in [0,+\infty]$ et $\beta = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{h_\varepsilon}{\varepsilon} \in [0,+\infty]$(listés ci-dessous) et tenterai de faire passer quelques idées clés de leurs démonstrations (certains régimes constituent un travail en cours).

Régime	**Modèle asymptotique**
$\alpha = 0$ et $\beta \in (0,+\infty)$	rupture fragile
$\alpha = +\infty$ ou $\beta = +\infty$	élasticité linéaire
$\alpha = \beta = 0$	modèle trivial
$\alpha \in (0,+\infty)$ et $\beta = 0$	plasticité de Hencky
$\alpha, \beta \in (0,+\infty)$	entre plasticité et rupture fragile

Références

[1] G. A. Francfort, J.-J. Marigo : Stable damage evolution in a brittle continuous medium, *Eur. J. Mech. A/Solids*, **12** (1993) 149–189.

Contact : `elise.bonhomme@ulb.be`