Une méthode de frontière immergée basée sur la résolution d'un problème de contrôle optimal

Guillaume DELAY, LJLL - Paris **Fabien VERGNET**, LJLL - Paris

Nous nous intéressons à une méthode à maillage non conforme de type contrôle optimal, initialement proposée dans [1] pour la résolution d'un problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson à coefficient constant dans des géométries complexes. Dans ce contexte, le domaine de calcul est étendu à un domaine plus grand mais plus facile à mailler, comme c'est souvent le cas pour les méthodes de type domaine fictif. La principale difficulté réside alors dans la prise en compte de la condition aux limites sur la frontière qui n'est pas représentée par le maillage. La particularité de la méthode étudiée est d'introduire un terme source dans la région fictive du domaine afin d'imposer cette condition aux limites. Ce terme source, appelé "contrôle" dans la suite, est choisi de sorte à résoudre un problème des moindres carrés faisant intervenir la condition aux limites sur la frontière non représentée par le maillage. Un avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas de traitement particulier de l'interface et qu'elle peut être étendue à des systèmes d'équations aux dérivées partielles elliptiques couplées, comme un problème d'interaction fluide-structures avec des structures rigides immergées dans un fluide de Stokes [5] ou des problèmes de transmission elliptiques plus généraux (Poisson, Stokes, couplage Stokes-élasticité linéarisé) [4]. En contrepartie, nous verrons que la formulation du problème sous la forme d'un problème de contrôle optimal n'est pas bien posée, au sens qu'il peut exister plusieurs contrôles solutions du même problème des moindres carrées. Cela complique évidemment l'analyse numérique de cette méthode et, en particulier, il n'existe à notre connaissance aucun résultat de convergence en maillage pour le problème discrétisé.

Dans cet exposé, nous justifierons la validité de cette méthode dans le cas d'un problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson et nous présenterons un résultat récent de convergence pour la solution du problème discrétisé par éléments finis. La preuve de ce résultat se base sur la régularisation du problème discret en ajoutant des termes de stabilisation consistants, inspirée des approches développées dans [2, 3] pour l'analyse numérique de problèmes elliptiques mal posés.

[1] C. Atamian, Q. V. Dinh, R. Glowinski, J. He, J. Périaux. *Control approach to fictitious-domain methods. Application to fluid dynamics and electro-magnetics.* In *Proc. of the 4th International Symposium on DDM for PDEs*, pp. 275–309. SIAM, Philadelphia, 1991.

[2] E. Burman. *Error estimates for stabilized finite element methods applied to ill-posed problems.* **352(7-8)**, 655–659.

[3] E. Burman. *Stabilized finite element methods for nonsymmetric, noncoercive, and ill-posed problems. part II : Hyperbolic equations.* **36(4)**, A1911–A1936.

[4] A. Decoene, S. Martin, F. Vergnet. *A smooth extension method for transmission problems.* `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02146271v2`.

[5] B. Fabrèges, L. Gouarin, B. Maury. *A smooth extension method.* Comptes Rendus Mathématique, **351(9)**, 361–366, 2013.

Contact : `fabien.vergnet@sorbonne-universite.fr`