Coût de contrôlabilité des systèmes hyperboliques du premier ordre.

Vincent Laheurte

Supervisé par Franck Sueur (IMB)
Collaboration avec Roberta Bianchini (CNR)

Plan

1. Contrôle et Observation pour les EDOs linéaires
2. Généralisation de l'approche à un modèle-jouet de transport
3. Contrôle hautes-fréquences des systèmes pseudo-différentiels à une vélocité
4. Conclusion

Bases de théorie du contrôle

Système de contrôle

$$\begin{cases} y'(t) + A(t)y(t) = B(t)f(t), & t \in [0,T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

où $y : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ est l'inconnue, $A : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times N}$ est l'opérateur de contrôle, donné, et $f(t) : [0,T] \to \mathbb{R}^N$ est le paramètre de contrôle, à choisir.

Système de contrôle

$$\begin{cases} y'(t) + A(t)y(t) = B(t)f(t), & t \in [0,T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

où $y : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ est l'inconnue, $A : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times N}$ est l'opérateur de contrôle, donné, et $f(t) : [0,T] \to \mathbb{R}^N$ est le paramètre de contrôle, à choisir.

Question de la contrôlabilité exacte :

Pour tous $y_0, y_T \in \mathbb{R}^n$, existe-t-il un paramètre de contrôle $f \in L^2([0,T];\mathbb{R}^N)$ tel que $y(0) = y_0, y(T) = y_T$?

Contrôlabilité à zéro et son coût

Contrôlabilité à zéro :

On considère uniquement l'état cible $y_T = 0$:

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^n, \exists ? f \in L^2([0,T];\mathbb{R}^N) : y(0) = y_0, y(T) = 0.$$

Pour les systèmes linéaire, contrôlabilité $\iff$ contrôlabilité à zéro.

Contrôlabilité à zéro et son coût

Contrôlabilité à zéro :

On considère uniquement l'état cible $y_T = 0$:

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^n, \exists ? f \in L^2([0,T];\mathbb{R}^N) : y(0) = y_0, y(T) = 0.$$

Pour les systèmes linéaire, contrôlabilité $\iff$ contrôlabilité à zéro.

Coût de contrôlabilité :

Le coût de contrôlabilité du système de contrôle (1) est la constante

$$\mathcal{C}_{\mathrm{cont,A,B,T}} = \sup_{|y_0|=1} \inf \{\|f\|_{L^2} : y(0) = y_0, y(T) = 0\}$$

Dualité Contrôle/Observation

Théorème :

(1) est contrôlable à zéro en temps T si et seulement si le système adjoint

$$b'(t) + A^*(t)b(t) = 0, \quad b(0) = b_0 \tag{2}$$

est observable en temps T pour l'opérateur d'observation B^*, c'est-à-dire s'il existe $\mathcal{C}_{\mathrm{obs,A^*,B^*,T}} > 0$ tel que toute solution b de (2) vérifie :

$$|b(T)|^2 \leq \mathcal{C}^2_{\mathrm{obs,A^*,B^*,T}} \int_0^T |B^*(t)b(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

De plus, on a

$$\mathcal{C}_{\mathrm{obs,A^*,B^*,T}} = \mathcal{C}_{\mathrm{cont,A,B,T}}$$

Caractérisation algébrique de l'observabilité

Théorème :

Le système (2) est observable pour B^* si et seulement si la *Gramienne d'observabilité* $G(T)$, solution au temps T de

$$\begin{aligned} G'(t) - A(t)G(t) - G(t)A^*(t) &= B(t)B^*(t), \\ G(0) &= 0, \end{aligned}$$

est inversible, et dans ce cas le coût est donné par

$$\mathcal{C}_{\mathrm{obs,A^*,B^*,T}} = \left(\lambda_{\min}(G(T))\right)^{-1/2}.$$

Idée de la preuve

La preuve se fait en deux étapes :

- On regarde l'EDO vérifiée par un tenseur d'énergie, ici $b \otimes b$:

$$(b \otimes b)'(t) + A^*(b \otimes b) + (b \otimes b)A = 0.$$

Idée de la preuve

La preuve se fait en deux étapes :

- On regarde l'EDO vérifiée par un tenseur d'énergie, ici $b \otimes b$:

$$(b \otimes b)'(t) + A^*(b \otimes b) + (b \otimes b)A = 0.$$

- On exploite les relations de dualité.
  En notant l'énergie $E_R(t) := G(t) : (b \otimes b)(t)$, on a

$$E_R'(t) = B(t)B^*(t) : (b \otimes b)(t) = |B^*(t)b(t)|^2.$$

  Comme $G(0) = 0$, on peut écrire l'énergie observée sous la forme :

$$\int_0^T |B^*(t)b(t)|^2 \, \mathrm{d}t = E_R(T) = b^*(T)G(T)b(T).$$

Enoncé du problème

On considère l'EDP de transport :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (v \cdot \nabla)\mathbf{u} + A\mathbf{u} = 0, & x \in \mathbb{R}^d, t \in [0,T], \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{3}$$

où $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ donné, $A_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{n \times n}$ donné, $\mathbf{u} : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ est l'inconnue, et $B : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{N \times n}$ est l'opérateur d'observation donné.

But : Obtenir une inégalité d'observation de la forme

$$\|\mathbf{u}(T)\|_{L^2}^2 \leq \mathcal{C}^2 \int_0^T \|B(t,x)\mathbf{u}(t,x)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}t,$$

et calculer la constante $\mathcal{C}$ minimale.

Le résultat principal

On définit le flot caractéristique par

$$\partial_t \varphi(t,x) = v(\varphi(t,x)), \quad \varphi(0,x) = x.$$

Théorème :

Le coût d'observation du système (3) est donné par

$$\mathcal{C} = \left(\inf_{x \in \mathbb{R}^d} \lambda_{\min}(G_x(T)) \right)^{-1/2},$$

où la Gramienne $G_x(T)$ est la solution au temps T de

$$G_x'(t) - A_x^*(t) G_x(t) - G_x(t) A_x(t) = B_x^*(t) B_x(t), \quad G_x(0) = 0,$$

avec

$$A_x(t) = A(X_x(t)) - \frac{1}{2}\mathsf{div}(v)(X_x(t)), \quad B_x(t) = B(X_x(t)).$$

Idée de la preuve

On suit les mêmes étapes que dans le cas EDO :

Idée de la preuve

On suit les mêmes étapes que dans le cas EDO :

- On regarde l'évolution d'un tenseur d'énergie pertinent, ici $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$:

$$\partial_t(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + (v \cdot \nabla)(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + A(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})A^* = 0.$$

Idée de la preuve

On suit les mêmes étapes que dans le cas EDO :

- On regarde l'évolution d'un tenseur d'énergie pertinent, ici $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$:

$$\partial_t(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + (v \cdot \nabla)(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + A(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})A^* = 0.$$

- On exploite les relations de dualité :
  On définit la matrice $M(t, x)$ telle que

$$\partial_t M + (v \cdot \nabla)M + \mathrm{div}(v)M - A^*M - MA = B^*B, \quad M(0) = 0,$$

  ainsi que l'énergie $E_R(t) := \int_{\mathbb{R}^d} M : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})\, \mathrm{d}x$. On a alors :

$$E_R'(t) = \int_{\mathbb{R}^d} B^*B : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})\, \mathrm{d}x = \|B\mathbf{u}\|_{L^2}^2,$$

  donc

$$\int_0^T \|B\mathbf{u}\|_{L^2}^2\, \mathrm{d}t = E_R(T) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{u}^*(T)M(T)\mathbf{u}(T).$$

Idée de la preuve

On suit les mêmes étapes que dans le cas EDO :

- On regarde l'évolution d'un tenseur d'énergie pertinent, ici $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$:

$$\partial_t(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + (v \cdot \nabla)(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + A(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})A^* = 0.$$

- On exploite les relations de dualité :
  On définit la matrice $M(t, x)$ telle que

$$\partial_t M + (v \cdot \nabla)M + \mathsf{div}(v)M - A^* M - MA = B^* B, \quad M(0) = 0,$$

  ainsi que l'énergie $E_R(t) := \int_{\mathbb{R}^d} M : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})\, \mathrm{d}x$. On a alors :

$$E_R'(t) = \int_{\mathbb{R}^d} B^* B : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})\, \mathrm{d}x = \|B\mathbf{u}\|_{L^2}^2,$$

  donc

$$\int_0^T \|B\mathbf{u}\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}t = E_R(T) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{u}^*(T) M(T) \mathbf{u}(T).$$

- On élimine le terme de transport en prenant $G_x(t) := M(t, \varphi(t, x))$

Remarques

- L'expression de l'énergie observée permet d'améliorer le coût pour des données initiales localisées.

Remarques

- L'expression de l'énergie observée permet d'améliorer le coût pour des données initiales localisées.
- L'observabilité de l'EDP de transport est équivalente à l'observabilité uniforme de la famille d'EDOs caractéristiques

$$\begin{cases} b' + A_x(t)b = 0, \\ \qquad\quad b(0) = b_0, \end{cases}$$

pour l'opérateur d'observation B_x.

Le contexte pseudo-différentiel

On prend $\varepsilon \ll 1$, et on se place dans le régime hautes fréquences $\xi \sim \frac{1}{\varepsilon}$.

Pour un symbole $a(x,\xi)$ dans C_b^∞, on définit l'opérateur pseudo-différentiel associé par :

$$\mathrm{op}_\varepsilon^{\mathrm{w}}[a(x,\xi)]u(x) := \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right) u(y) e^{i\frac{(x-y)\cdot\xi}{\varepsilon}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi.$$

Ca généralise la notion habituelle de symbole différentiel :

$$\partial_{x_j} \leftrightarrow i\frac{\xi_j}{\varepsilon}, \quad (v(x)\cdot\nabla) \leftrightarrow \frac{i}{\varepsilon}v(x)\cdot\xi + \frac{1}{2}\mathrm{div}(v), \cdots,$$

et permet de gérer une classe plus grande d'opérateurs, par exemple les termes de pression.

Enoncé du problème

On considère les problèmes de Cauchy pseudo-différentiels de la forme

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}^\varepsilon + \dfrac{i}{\varepsilon} \operatorname{op}_\varepsilon^{\mathrm{w}}[H]\mathbf{u}^\varepsilon + \operatorname{op}_\varepsilon^{\mathrm{w}}[A]\mathbf{u}^\varepsilon = 0, & x \in \mathbb{R}^d, t \in [0,T], \\ \mathbf{u}^\varepsilon(0) = \mathbf{u}_0^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{4}$$

où $H(x,\xi)$ est un symbole réel scalaire, $A(x,\xi)$ est un symbole matriciel $n \times n$, et on considère un symbole d'observation $B(t,x,\xi)$ matriciel $N \times n$ quelconque.

But : Obtenir une inégalité d'observabilité en hautes-fréquences de la forme :

$$\forall (\mathbf{u}_0^\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1]} \subset L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\|\mathbf{u}^\varepsilon(T)\|_{L^2}^2}{\int_0^T \|\operatorname{op}_\varepsilon^{\mathrm{w}}[B]\mathbf{u}^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}t} \leq \mathcal{C}^2,$$

et exprimer la constante optimale $\mathcal{C}$.

Choix du tenseur d'énergie : transformée de Wigner

Pour $u, v \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, on définit la matrice de Wigner comme

$$W^\varepsilon[u,v](x,\xi) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} u\left(x - \varepsilon\frac{y}{2}\right) \otimes v\left(x + \varepsilon\frac{y}{2}\right) e^{iy\cdot\xi}\,\mathrm{d}y.$$

Choix du tenseur d'énergie : transformée de Wigner

Pour $u, v \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, on définit la matrice de Wigner comme

$$W^\varepsilon[u,v](x,\xi) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} u\left(x - \varepsilon\frac{y}{2}\right) \otimes v\left(x + \varepsilon\frac{y}{2}\right) e^{iy\cdot\xi}\,\mathrm{d}y.$$

- Contient de l'information sur la localisation de l'énergie dans l'espace des phases :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{tr}(W^\varepsilon[u,v](x,\xi))\,\mathrm{d}\xi = (u \otimes v)(x),$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{tr}(W^\varepsilon[u,v](x,\xi))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^d} (\widehat{u} \otimes \widehat{v}) \left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right),$$

Choix du tenseur d'énergie : transformée de Wigner

Pour $u, v \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, on définit la matrice de Wigner comme

$$W^\varepsilon[u,v](x,\xi) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} u\left(x - \varepsilon \frac{y}{2}\right) \otimes v\left(x + \varepsilon \frac{y}{2}\right) e^{iy\cdot\xi} \, \mathrm{d}y.$$

- Contient de l'information sur la localisation de l'énergie dans l'espace des phases :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{tr}(W^\varepsilon[u,v](x,\xi)) \, \mathrm{d}\xi = (u \otimes v)(x),$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{tr}(W^\varepsilon[u,v](x,\xi)) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^d} (\widehat{u} \otimes \widehat{v}) \left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right),$$

- Compatible avec les opérateurs pseudo-différentiels :

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} a(x,\xi) : W^\varepsilon[u,v](x,\xi) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\xi = \langle \mathrm{op}_\varepsilon^{\mathrm{w}}[a] u, v \rangle_{L^2},$$

et une version locale de cette égalité.

Evolution de la transformée de Wigner

En notant $\mathcal{W}^\varepsilon(t,x,\xi) := W^\varepsilon[\mathbf{u}^\varepsilon(t),\mathbf{u}^\varepsilon(t)](x,\xi)$, les règles de calcul pseudo-différentiels donnent l'évolution

$$\partial_t \mathcal{W}^\varepsilon + \{H, \mathcal{W}^\varepsilon\} + A\mathcal{W}^\varepsilon + \mathcal{W}^\varepsilon A^* = O(\varepsilon),$$

où $\{\cdot,\cdot\}$ est le crochet de Poisson

$$\{a,b\} = (\partial_\xi a)(\partial_x b) - (\partial_x a)(\partial_\xi b).$$

Evolution de la transformée de Wigner

En notant $\mathcal{W}^\varepsilon(t,x,\xi) := W^\varepsilon[\mathbf{u}^\varepsilon(t),\mathbf{u}^\varepsilon(t)](x,\xi)$, les règles de calcul pseudo-différentiels donnent l'évolution

$$\partial_t \mathcal{W}^\varepsilon + \{H, \mathcal{W}^\varepsilon\} + A\mathcal{W}^\varepsilon + \mathcal{W}^\varepsilon A^* = O(\varepsilon),$$

où $\{\cdot,\cdot\}$ est le crochet de Poisson

$$\{a,b\} = (\partial_\xi a)(\partial_x b) - (\partial_x a)(\partial_\xi b).$$

On introduit le multiplicateur $M(t,x,\xi)$ qui résout

$$\begin{cases} \partial_t M + \{H, M\} - A^* M - MA = B^* B, \\ \hfill M(0) = 0. \end{cases}$$

On obtient rapidement l'expression de l'énergie observée

$$\int_0^T \| \operatorname{op}_\varepsilon^{\mathrm{w}}[B]\mathbf{u}^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} M(T,x,\xi) : \mathcal{W}^\varepsilon(T,x,\xi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi + O(\varepsilon)$$

Le résultat principal

Le flot qui retire le terme de transport $\{H, \mathcal{W}^\varepsilon\}$ est le flot Hamiltonien, défini par

$$\partial_t \psi(t,x,\xi) = (\partial_\xi H(\psi(t,x,\xi)), -\partial_x H(\psi(t,x,\xi))), \quad \psi(0,x,\xi) = (x,\xi)$$

Théorème [Bianchini, L., Sueur, '24] :

Le coût d'observation en hautes fréquences du système (4) est donné par

$$\mathcal{C} = \left(\inf_{x,\xi \in \mathbb{R}^d} \lambda_{\min}(G_{x,\xi}(T)) \right)^{-1/2},$$

où $G_{x,\xi}$ résout

$$\begin{cases} G'_{x,\xi}(t) - A^*_{x,\xi}(t) G_{x,\xi}(t) - G_{x,\xi}(t) A_{x,\xi}(t) = B^*_{x,\xi}(t) B_{x,\xi}(t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad G_{x,\xi}(0) = 0, \end{cases}$$

avec

$$A_{x,\xi}(t) = A(\psi(t,x,\xi)), \quad B_{x,\xi}(t) = B(\psi(t,x,\xi)).$$

Remarques

- On a encore la possibilité d'affiner le coût si on a des informations sur la localisation de $W^\varepsilon[\mathbf{u}_0^\varepsilon, \mathbf{u}_0^\varepsilon]$.

Remarques

- On a encore la possibilité d'affiner le coût si on a des informations sur la localisation de $W^{\varepsilon}[\mathbf{u}_0^{\varepsilon}, \mathbf{u}_0^{\varepsilon}]$.
- L'observabilité du système pseudo-différentiel est équivalent à l'observabilité uniforme de la famille d'EDOs bi-caractéristiques

$$\begin{cases} b' + A_{x,\xi} b = 0, \\ \qquad b(0) = b_0, \end{cases}$$

pour l'opérateur d'observation $B_{x,\xi}$.

Extensions et pistes

- Méthode applicable aux systèmes fortement hyperboliques, créant un terme d'amplification supplémentaire.
- Possibilité de construire un contrôle explicite pour les EDPs à partir du contrôle des EDOs bi-caractéristiques associées.

Applications

Applications étudiées :

- Equations d'Euler incompressibles linéarisées autour du flot de Couette,
- Equations d'Euler compressibles pour les gaz parfaits avec force de Coriolis.
- Equations de Rossby-Poincaré.
- Systèmes de dissipation vérifiant la condition de Shizuta-Kawashima.

Merci pour votre attention !