

Méthodes numériques de frontière immergée pour la tomographie par impédance électrique

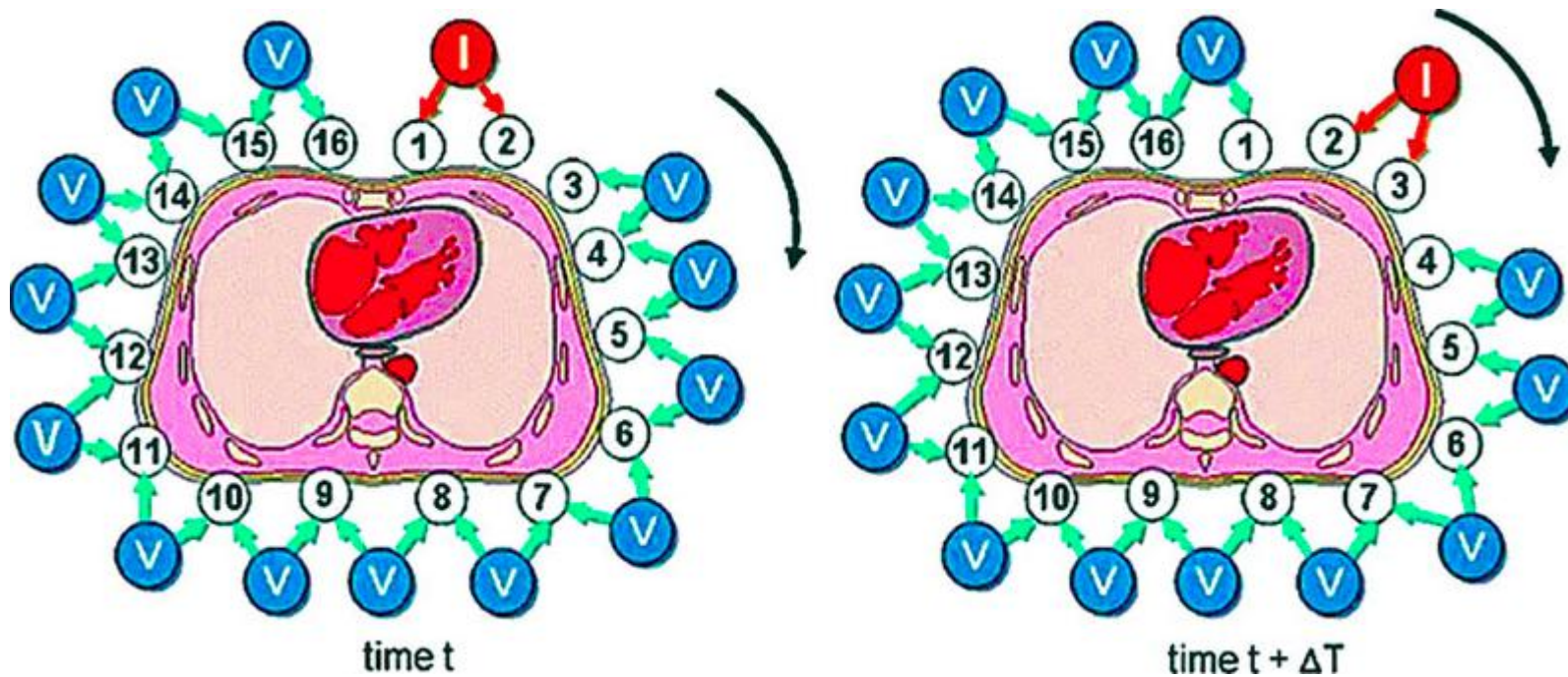
Jérémi Dardé (IMT) Niami Nasr (ICJ) Lisl Weynans (IMB)

Plan

- L'EIT : un problème inverse mal posé
- Modélisation du problème direct
- Une méthode de frontière immergée pour l'EIT
- Application : résolution de problèmes inverses
- Vers des applications plus réalistes
- Conclusion et perspectives

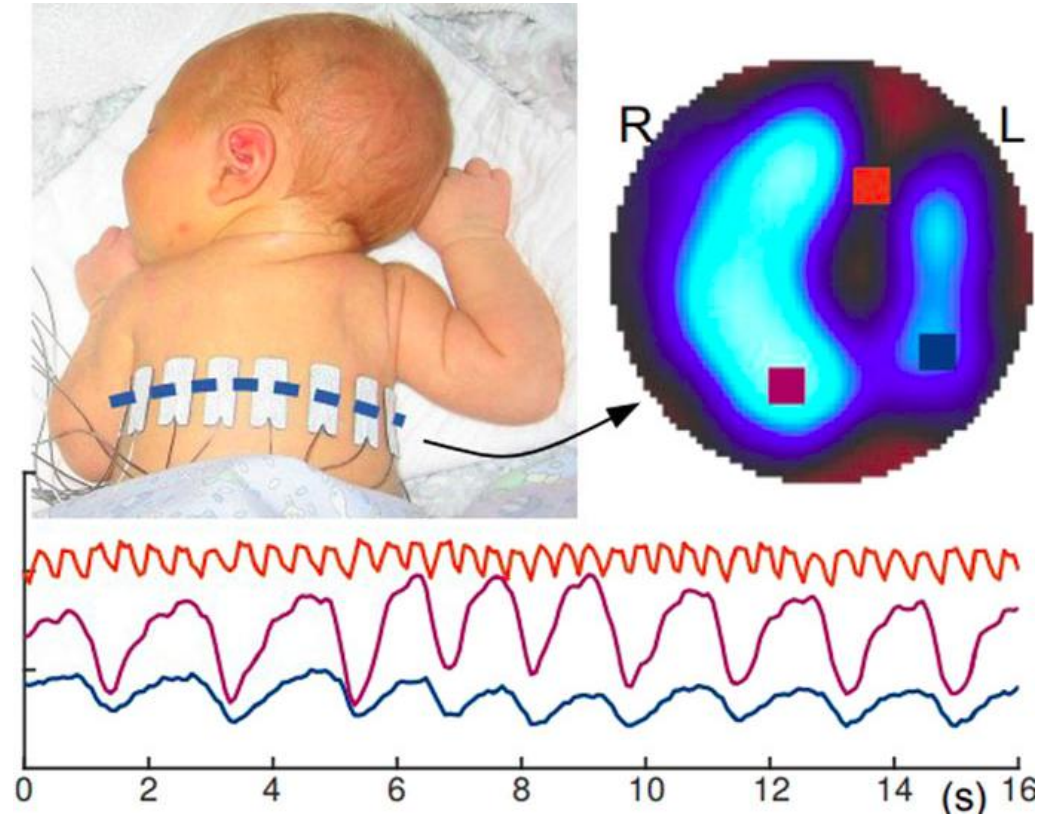
Tomographie par impédance électrique

La tomographie par impédance électrique (EIT) est une technique d'imagerie non invasive visant à reconstruire la distribution de conductivité électrique à l'intérieur d'un domaine en appliquant des courants électriques au bord du domaine à des électrodes et en mesurant les tensions résultantes.



Description de l'étape de mesure pour l'EIT (the adjacent driving mode Leonhardt and Lachmann, 2012)

Tomographie par impédance électrique : applications



Un nourrisson de 10 jours avec des électrodes EIT (Heinrich et al. 2006) pour un diagnostic et un traitement précoces des maladies pulmonaires au stade initial du développement.



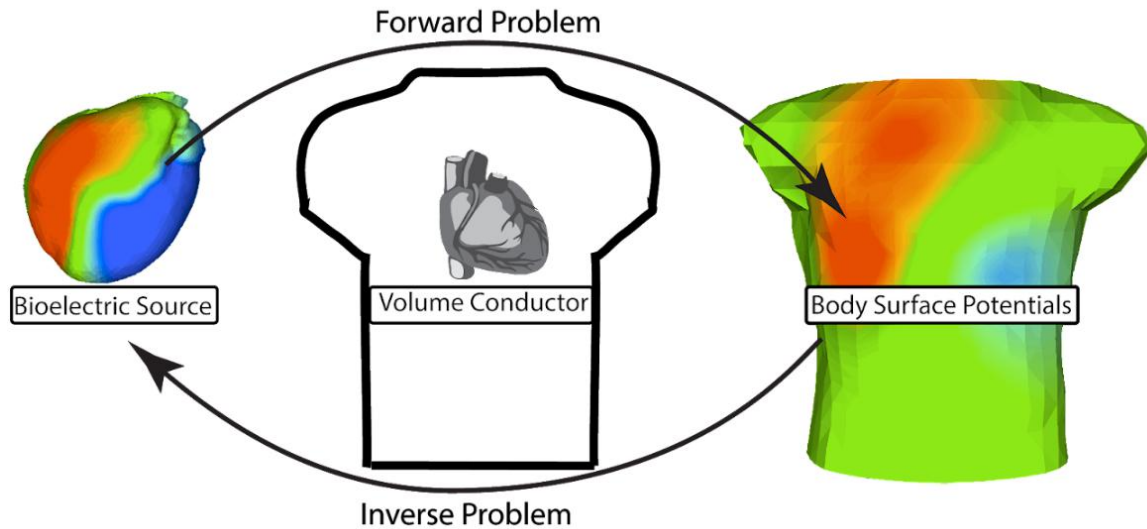
Surveillance en temps réel des patients atteints de maladies pulmonaires.

L'EIT dans un contexte électrocardiographique

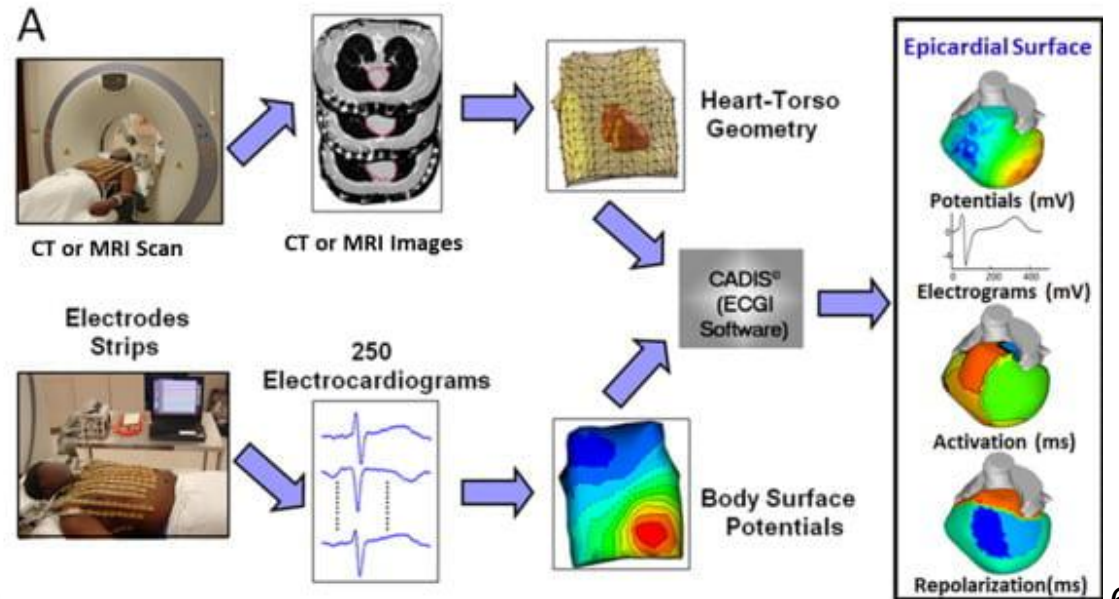
- Dans le cadre de l'institut des Maladies du Rythme Cardiaque (IHU Liryc)
- Objectif: détecter les troubles du fonctionnement électrique du coeur, responsables de la majorité des morts soudaines par arrêt cardiaque.
- Technique non-invasive pour reconstruire le champ électrique à la surface du coeur à partir de mesures sur le torse : **ECGi = imagerie électrocardiographique**

L'EIT dans un contexte électrocardiographique

- Dans le cadre de l'institut des Maladies du Rythme Cardiaque (IHU Liryc)
- Objectif: détecter les troubles du fonctionnement électrique du coeur, responsables de la majorité des morts soudaines par arrêt cardiaque.
- Technique non-invasive pour reconstruire le champ électrique à la surface du coeur à partir de mesures sur le torse : **ECGi = imagerie électrocardiographique**

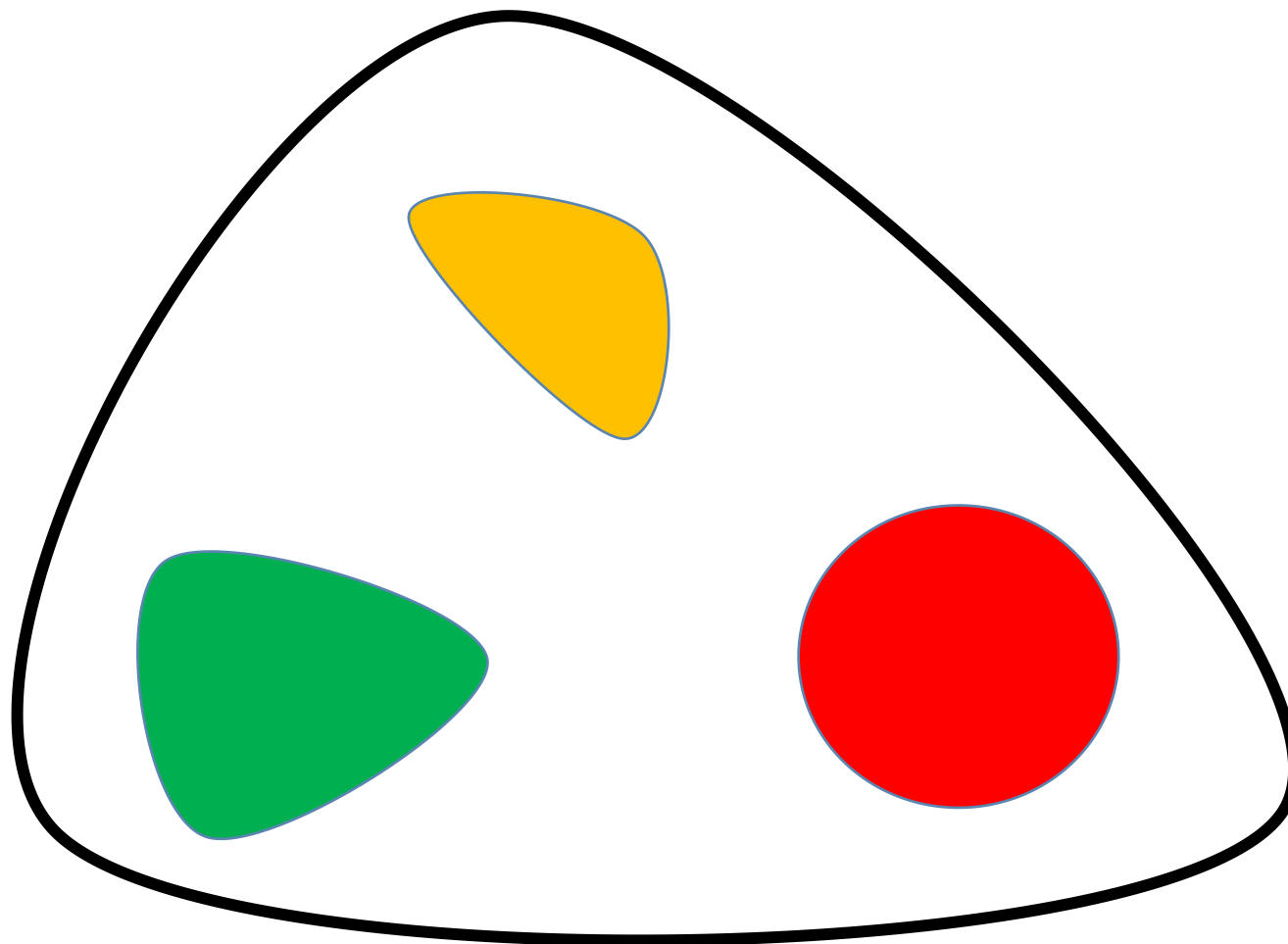


The ECGi Procedure



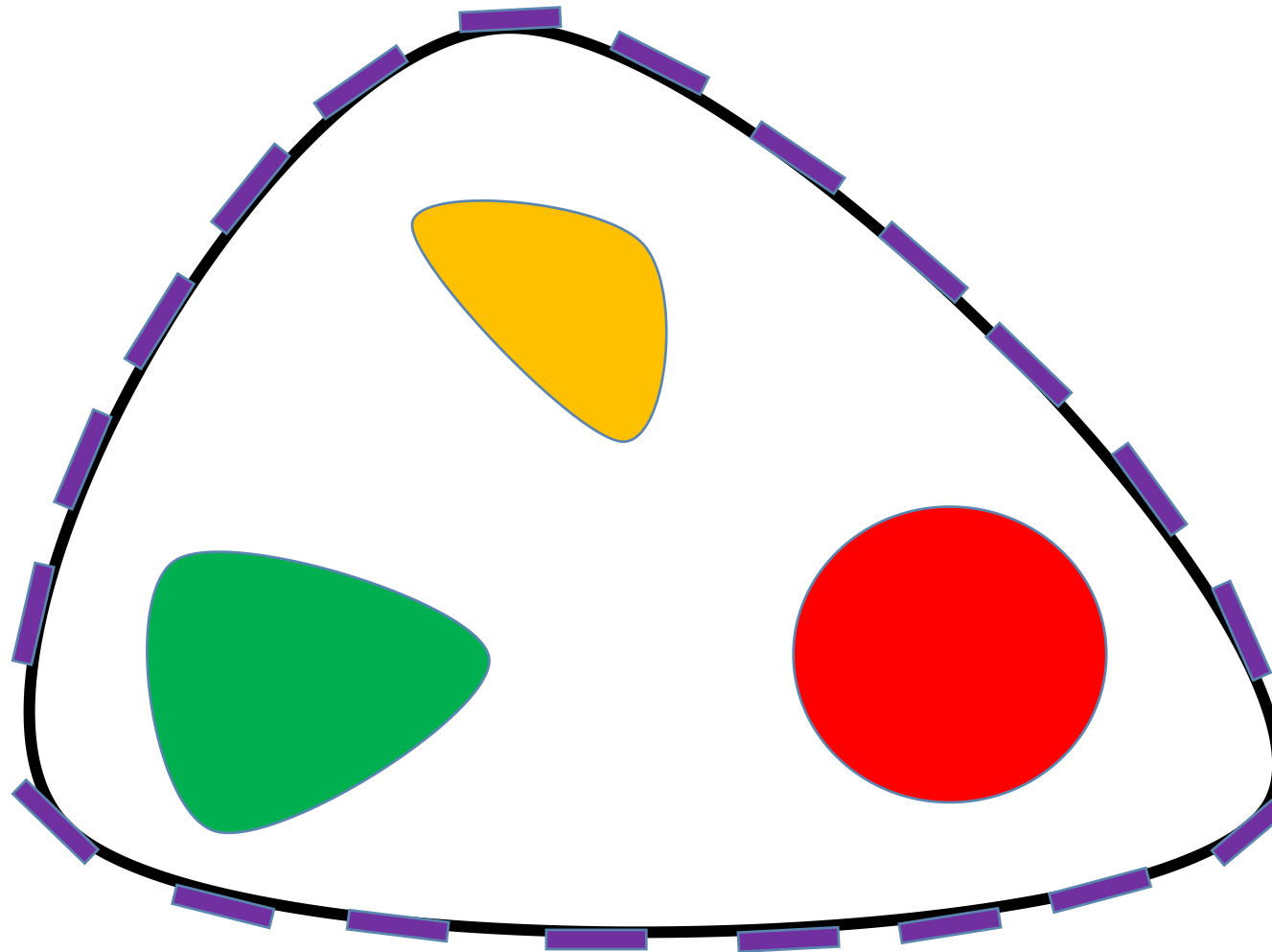
Tomographie par impédance électrique : dans le cadre de cette thèse

Généralement on a ce type de problème en 2D:



Tomographie par impédance électrique : dans le cadre de cette thèse

Généralement on a ce type de problème en 2D:



Problème classique :
trouver les conductivités des inclusions.

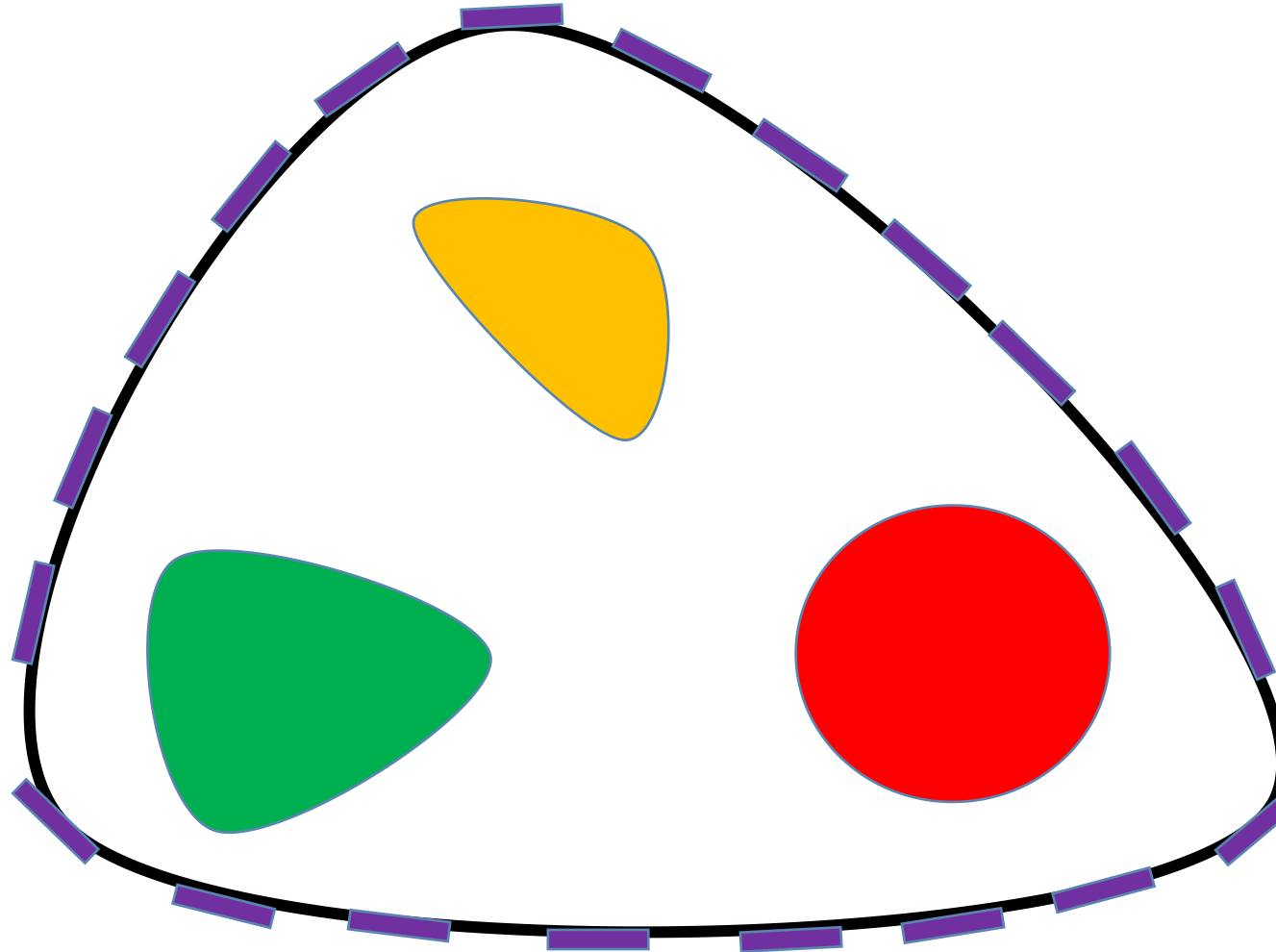


Problème inverse de Calderón.

Tomographie par impédance électrique : dans le cadre de cette thèse

Généralement on a ce type de problème en 2D:

Inconnues : conductivités, impédances de contact, géométrie du bord...



Problème classique :
trouver les conductivités des inclusions.



Problème inverse de Calderón.

Modélisation du problème direct

Modélisation du problème direct : Le modèle
continuum

Trouver u dans $H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma \partial_\nu u = f & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Conductivité ←
Potentiel ↗

avec f une fonction dans $L^2(\partial\Omega)$ qui vérifie :

$$\int_{\partial\Omega} f \, ds(x) = 0.$$

Pour une fonction de densité $f \in L^2(\partial\Omega)$ qui vérifie la condition $\int_{\partial\Omega} f \, ds = 0$, le modèle continuum admet une unique solution u dans $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$.

- Le modèle le plus simple.
- La condition au bord modélise la circulation libre du courant à travers tout le bord du domaine.
- Le plus simple à traiter mathématiquement.

Modélisation du problème direct : Le CEM

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ et $U \in \mathbb{R}_\diamond^M$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u + z_m \sigma \partial_\nu u = U_m \text{ sur } E_m, \\ \sigma \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \overline{E}, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u \, ds = I_m. \end{array} \right.$$

Avec E_m l'électrode m -ième, z_m l'impédance de contact associée, $I \in \mathbb{R}_\diamond^M$ le schéma de courant.

$$\mathbb{R}_\diamond^M = \left\{ I \in \mathbb{R}^M, \sum_{k=1}^M I_k = 0 \right\}.$$

Étant donné un courant d'entrée $I \in \mathbb{R}_\diamond^M$, le CEM admet une unique solution dans $\mathcal{H}^1 = (H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M)/\mathbb{R}$.

- Modélisation de l'injection des courants à travers des électrodes.
- Chaque électrode possède une impédance de contact.
- Le modèle le plus réaliste.

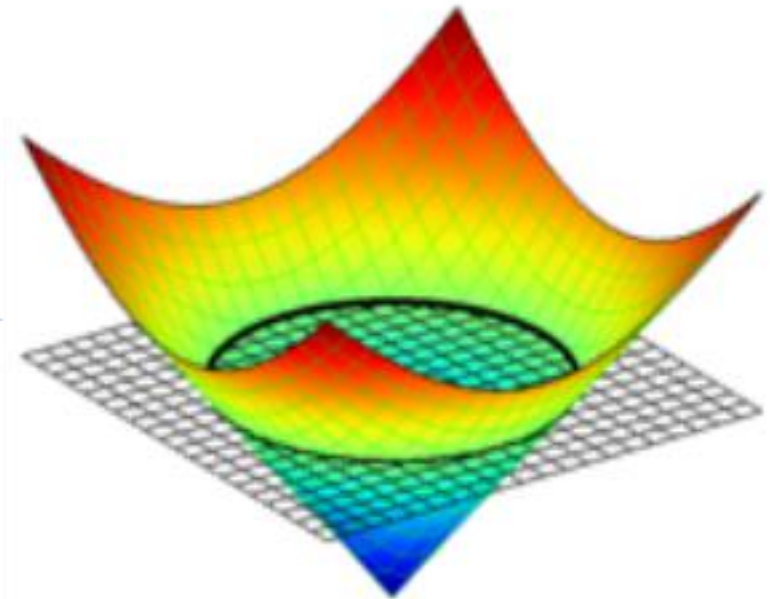
Une méthode de frontière immergée pour l'EIT

Représentation implicite du bord : Level-set

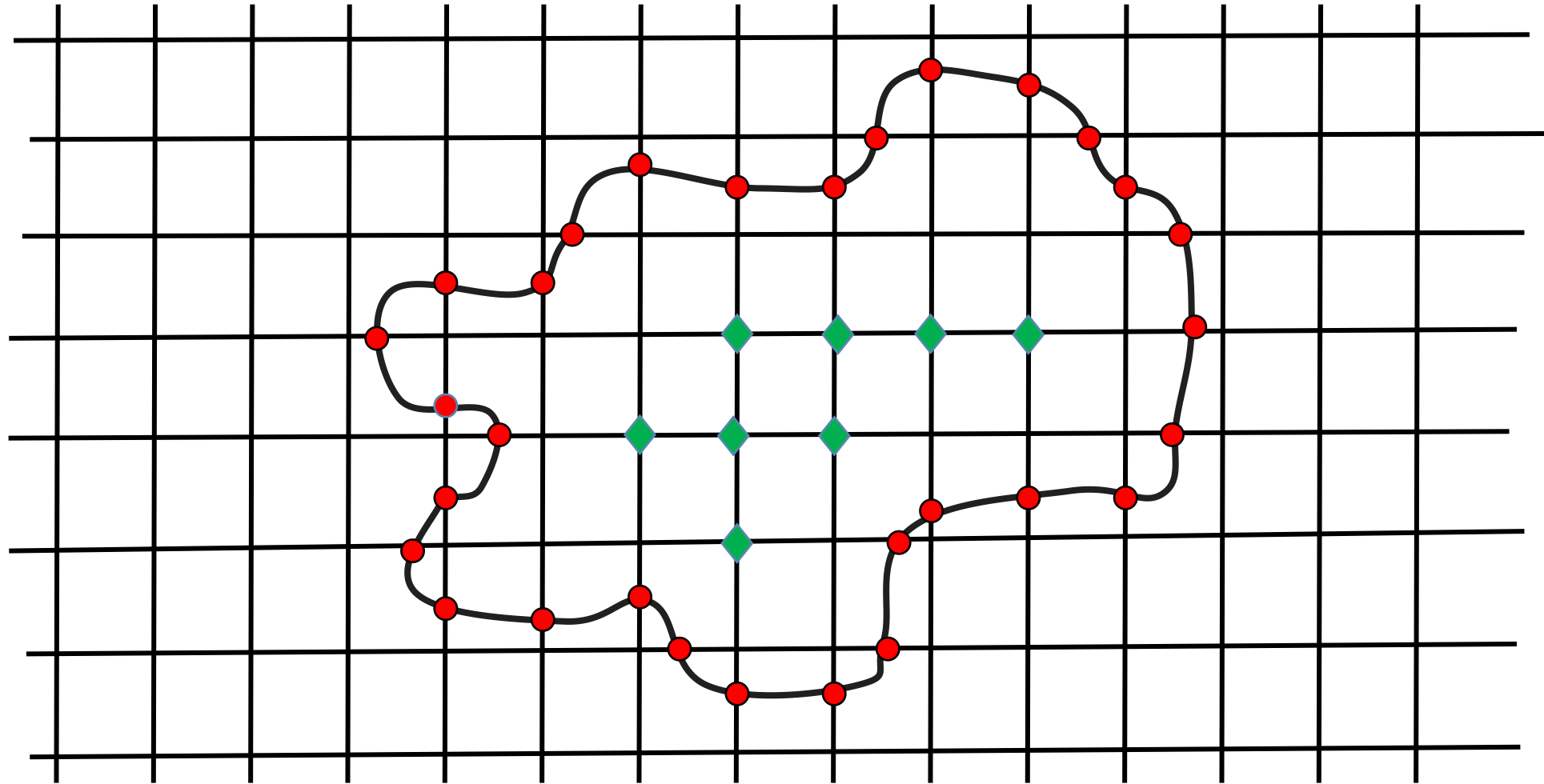
$$\begin{cases} \varphi(x) < 0 & \text{si } x \in \Omega, \\ \varphi(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega, \\ \varphi(x) > 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Le vecteur normal unitaire $\nu(x)$ à $\partial\Omega$, pointant vers l'extérieur de Ω , peut s'exprimer en termes de φ comme suit:

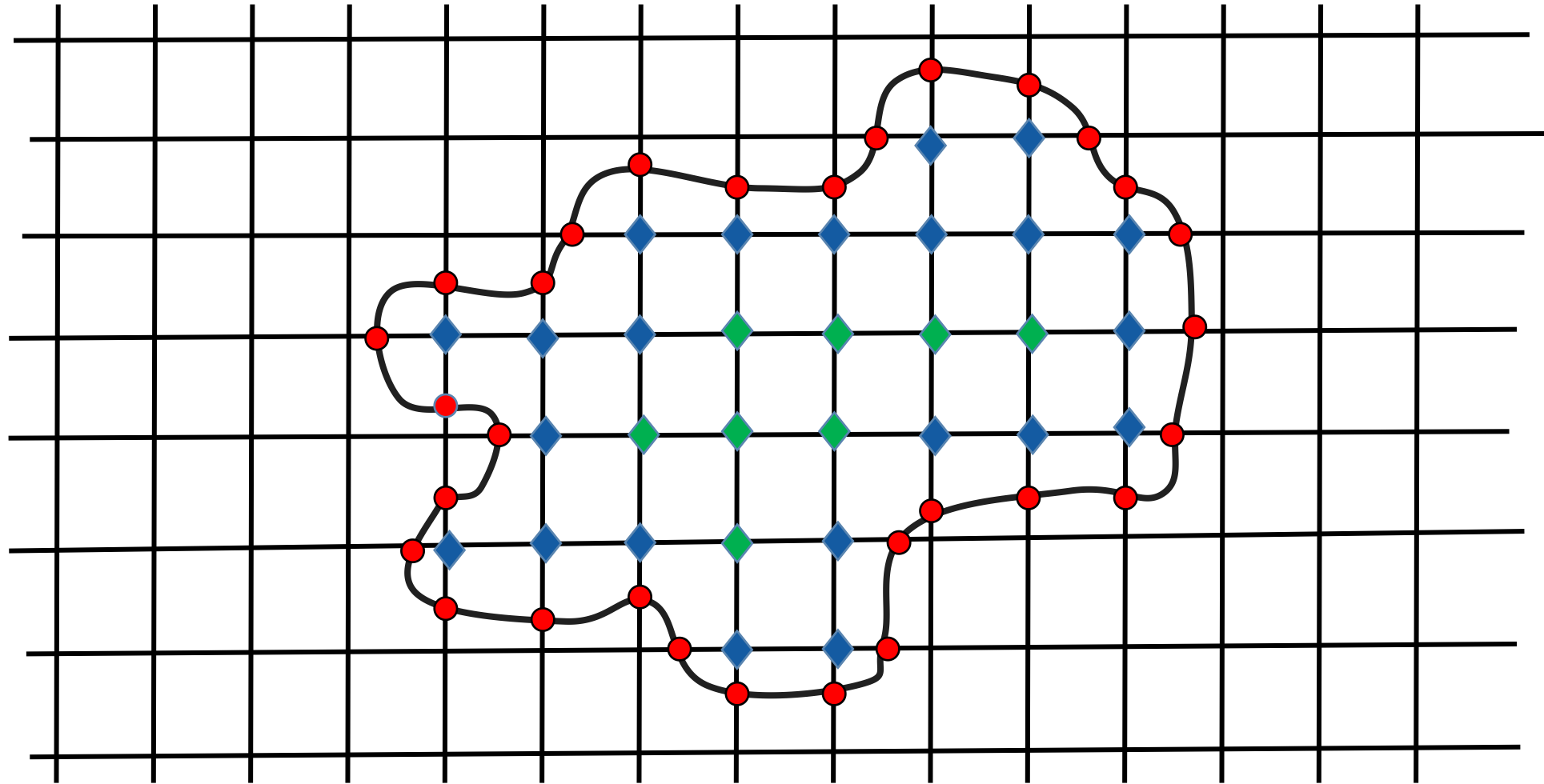
$$\forall x \in \Gamma, \quad \nu(x) = \frac{\nabla\varphi(x)}{|\nabla\varphi(x)|}.$$



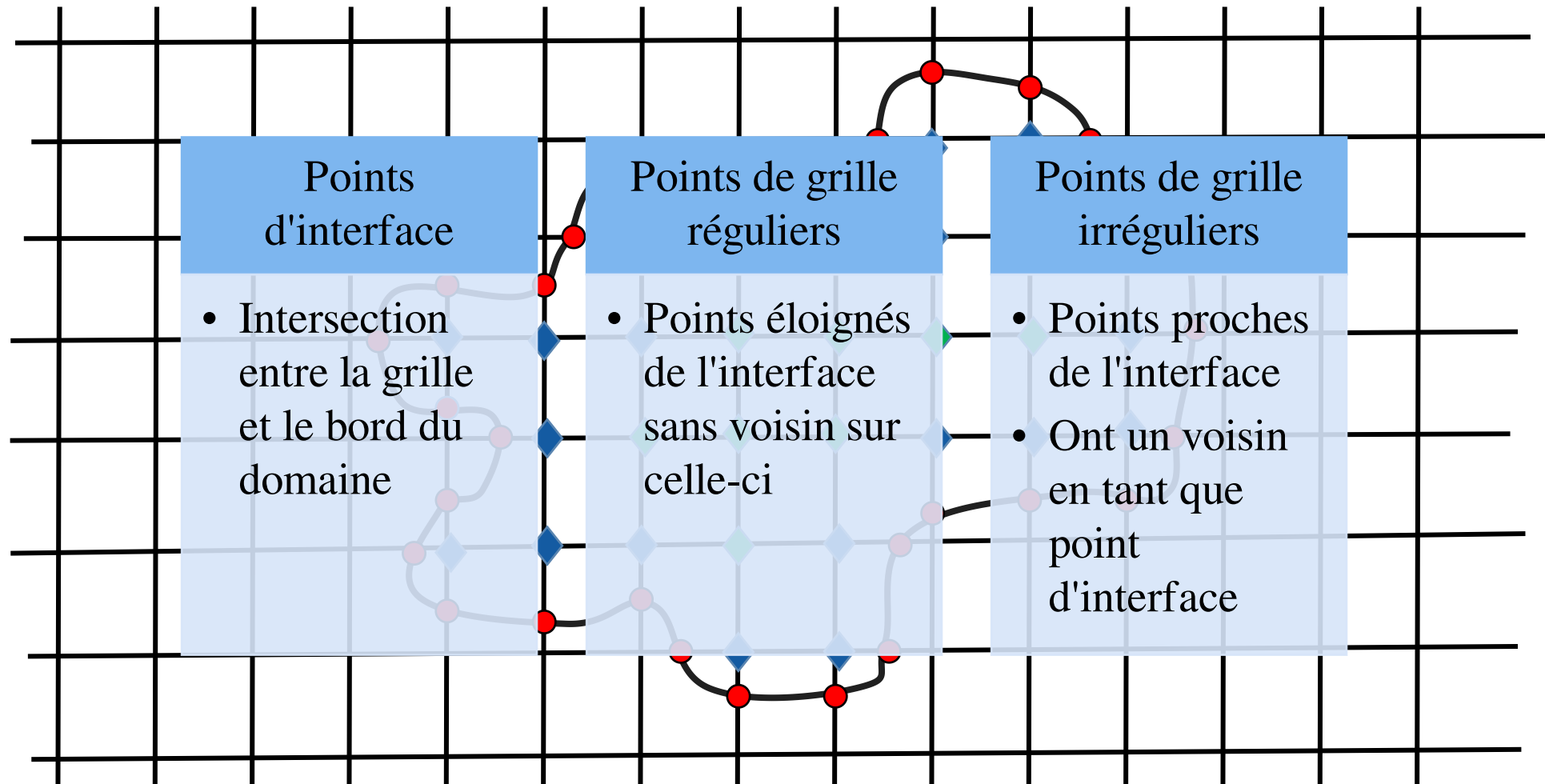
Une méthode numérique à frontière immergée
pour l'EIT



Une méthode numérique à frontière immergée
pour l'EIT



Une méthode numérique à frontière immergée
pour l'EIT

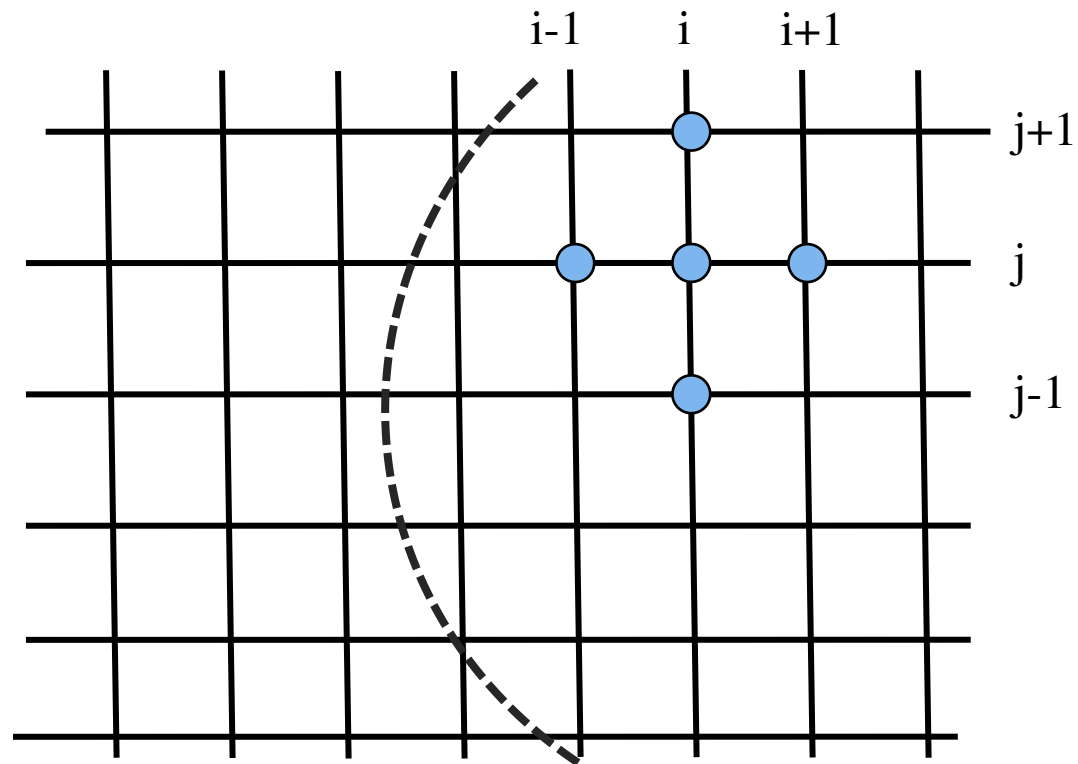


Discrétisation de l'opérateur elliptique :

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega$$

Pour les points réguliers : un schéma de différences finies usuel.

$$\begin{aligned} -\left(\nabla \cdot (\sigma \nabla u)\right)_{i,j}^h &= -\left(\sigma_{i+1/2,j} \frac{u_E^h - u_{ij}^h}{x_E - x_i} - \sigma_{i-1/2,j} \frac{u_{ij}^h - u_W^h}{x_i - x_W}\right) \frac{1}{h} \\ &\quad - \left(\sigma_{i,j+1/2} \frac{u_N^h - u_{ij}^h}{y_N - y_j} - \sigma_{i,j-1/2} \frac{u_{ij}^h - u_S^h}{y_j - y_S}\right) \frac{1}{h}. \end{aligned}$$

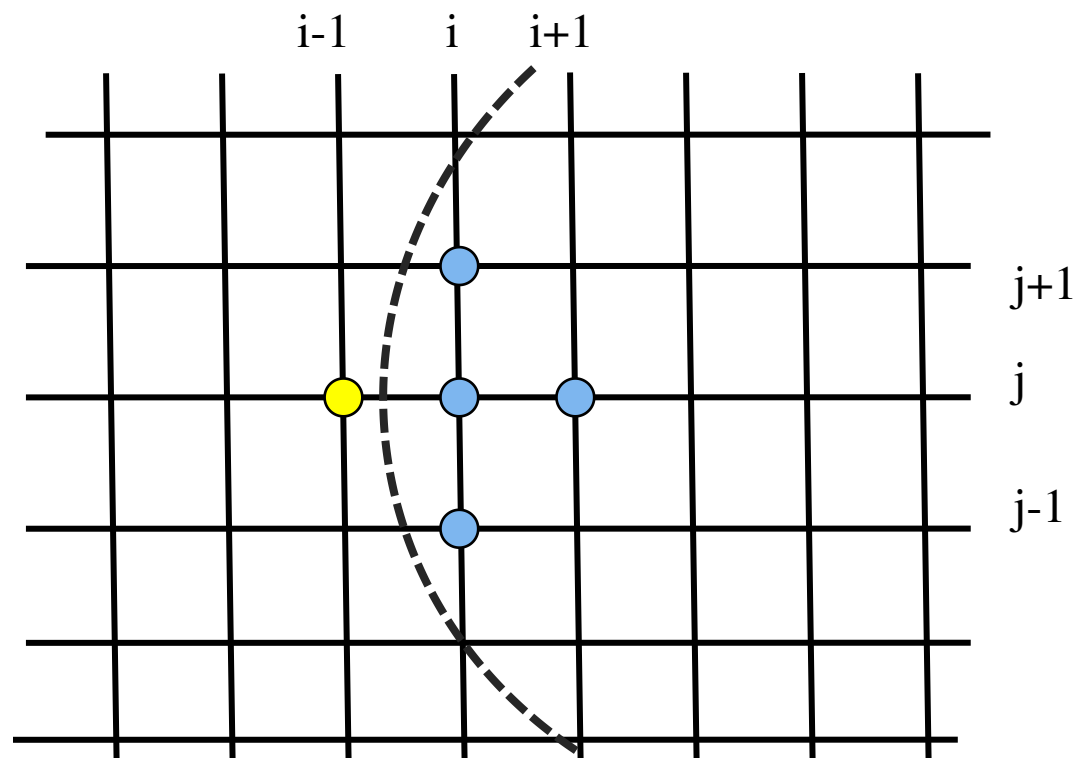


Discrétisation de l'opérateur elliptique :

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f$$

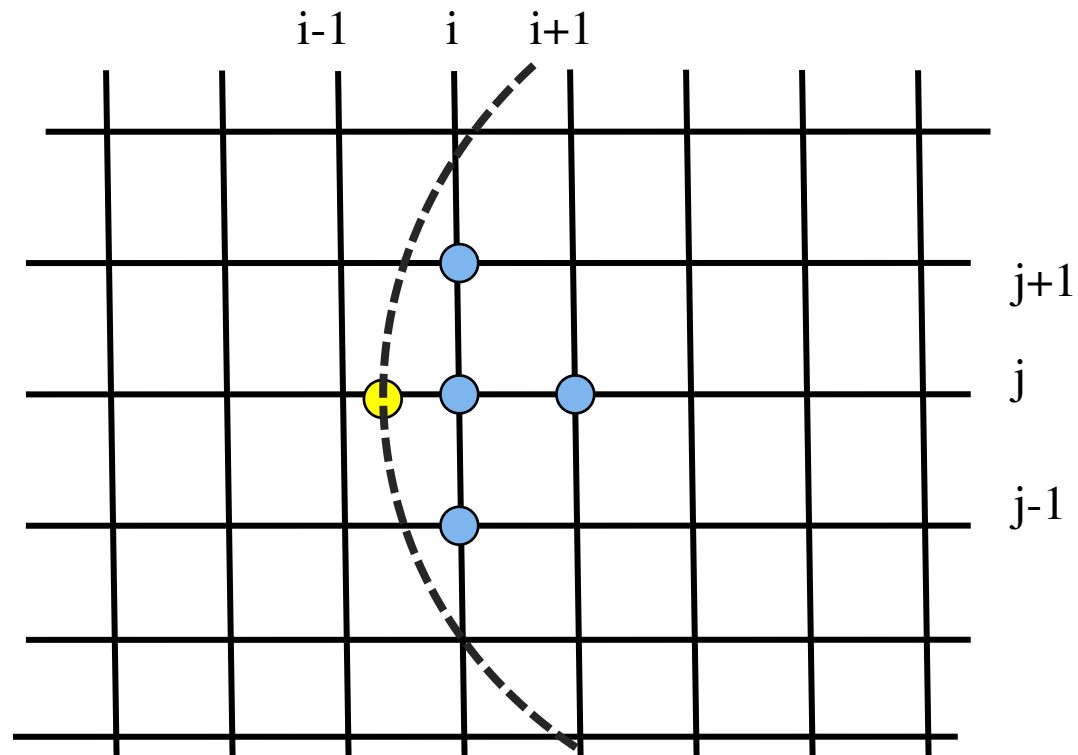
dans Ω

$$\begin{aligned} -\left(\nabla \cdot (\sigma \nabla u)\right)_{i,j}^h &= -\left(\sigma_{i+1/2,j} \frac{u_E^h - u_{ij}^h}{x_E - x_i} - \sigma_{i-1/2,j} \frac{u_{ij}^h - u_W^h}{x_i - x_W}\right) \frac{1}{h} \\ &\quad - \left(\sigma_{i,j+1/2} \frac{u_N^h - u_{ij}^h}{y_N - y_j} - \sigma_{i,j-1/2} \frac{u_{ij}^h - u_S^h}{y_j - y_S}\right) \frac{1}{h}. \end{aligned}$$



Discrétisation de l'opérateur elliptique :

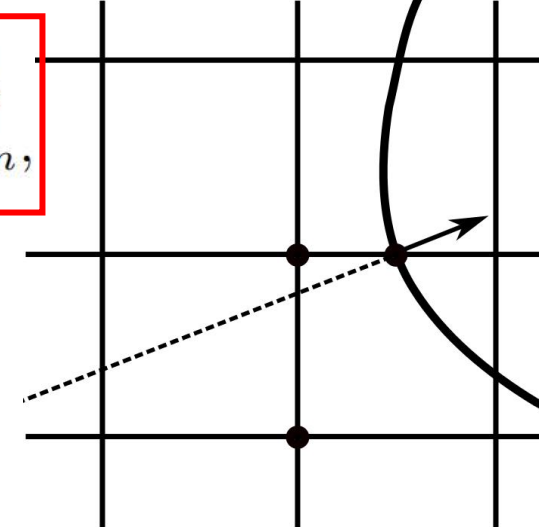
$$\begin{aligned}
 -\left(\nabla \cdot (\sigma \nabla u)\right)_{i,j}^h &= -\left(\sigma_{i+1/2,j} \frac{u_E^h - u_{ij}^h}{x_E - x_i} - \sigma_{i-1/2,j} \frac{u_{ij}^h - u_W^h}{x_i - x_W}\right) \frac{1}{h} \\
 &\quad - \left(\sigma_{i,j+1/2} \frac{u_N^h - u_{ij}^h}{y_N - y_j} - \sigma_{i,j-1/2} \frac{u_{ij}^h - u_S^h}{y_j - y_S}\right) \frac{1}{h}.
 \end{aligned}$$



Discrétisation des conditions de flux :

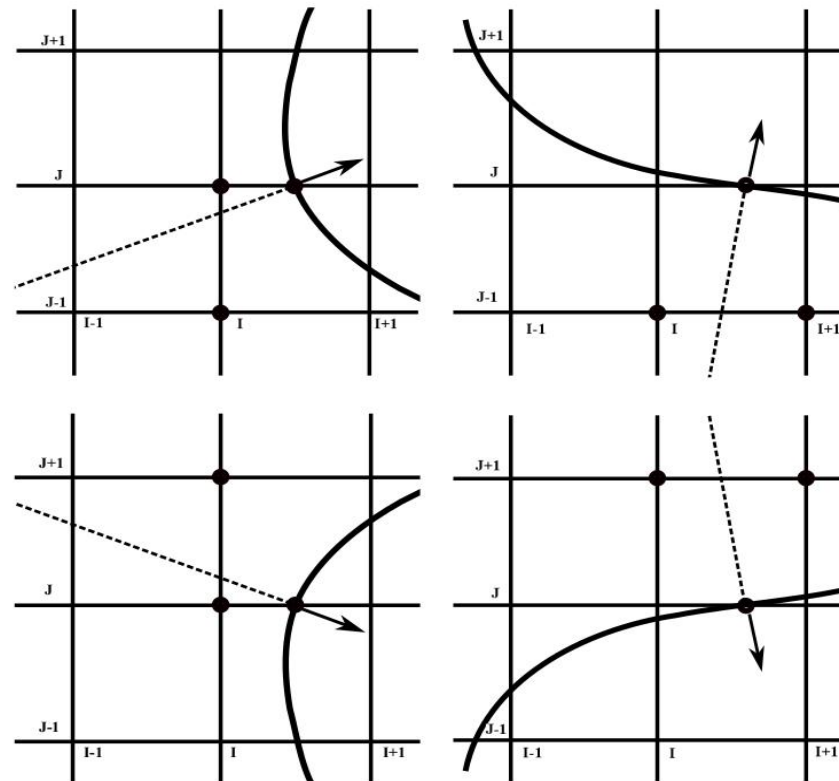
$$\begin{aligned} \sigma \partial_\nu u &= g && \text{sur } E_c \\ \sigma \partial_\nu u + \xi_m (u - U_m) &= g && \text{sur } E_m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(\nabla u \cdot \nu)_{i+1/2,j}^h + \xi_m(I_{i+1/2,j}) (u_{i+1/2,j}^h - U_m) &= g_{i+1/2,j} \text{ si } I_{i+1/2,j} \in E_m, \\ \sigma(\nabla u \cdot \nu)_{i+1/2,j}^h &= g_{i+1/2,j} \text{ sinon.} \end{aligned}$$



L'expression de $(\nabla u \cdot \nu)_{i+1/2,j}^h$ end de la géométrie du bord :

- l'intersection entre la normale à la frontière et la grille se situe généralement sur segment : **stencil de trois points** .



$$(\nabla u \cdot \nu)_{i+1/2,j}^h = (u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3) \nu_x + (u_1 \beta_1 + u_2 \beta_2 + u_3 \beta_3) \nu_y.$$

Si on note par **K** le triangle du stencil avec :

- $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ses sommets
- u_1, u_2, u_3 les valeurs associées

Les fonctions de base aux sommets pour l'interpolation linéaire s'écrivent comme suit :

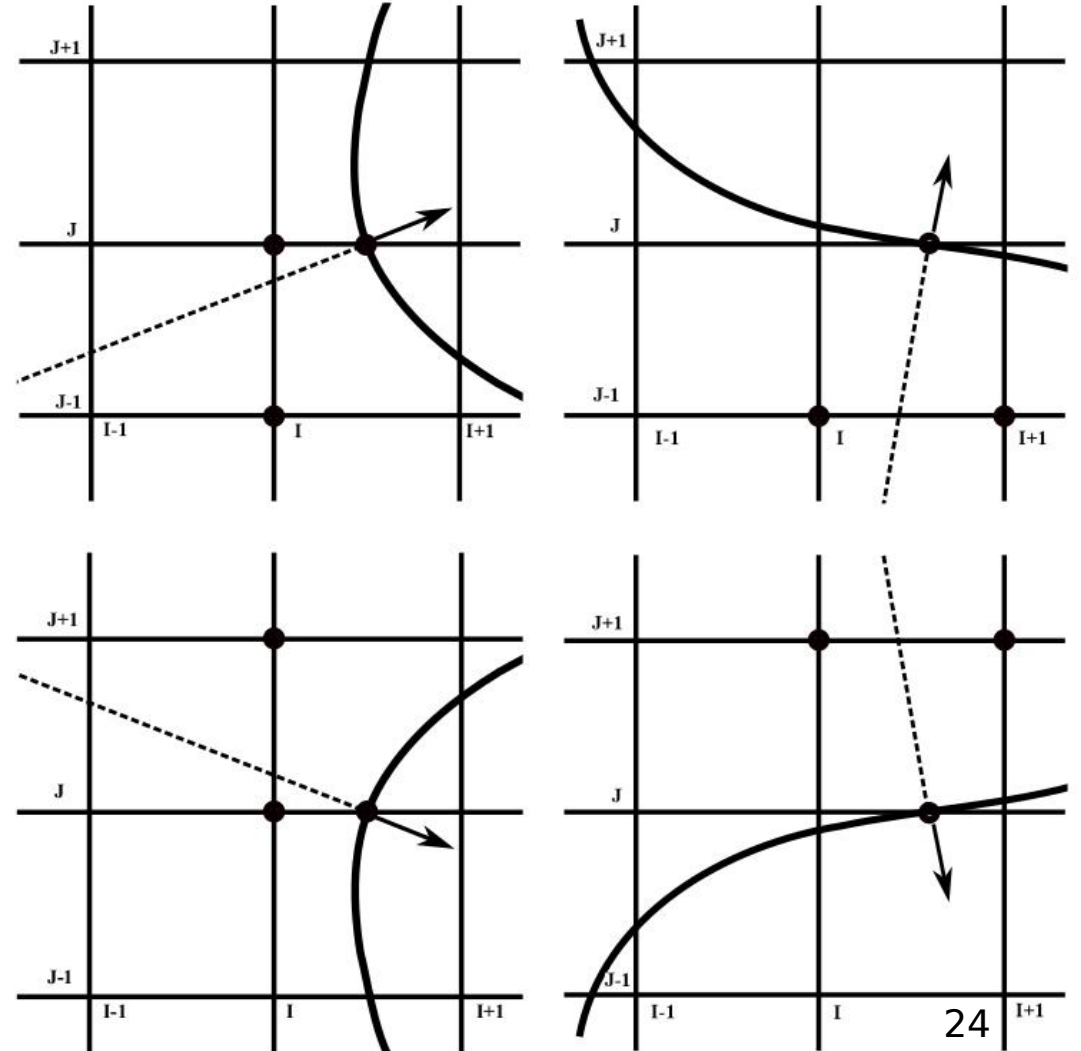
$$\lambda_j(x, y) = \alpha_j x + \beta_j y + \gamma_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

avec

$$\alpha_j = \frac{y_k - y_i}{(x_j - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y_k)},$$

$$\beta_j = \frac{x_i - x_k}{(x_j - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y_k)},$$

$$\gamma_j = \frac{x_k y_i - x_i y_k}{(x_j - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y_k)}.$$

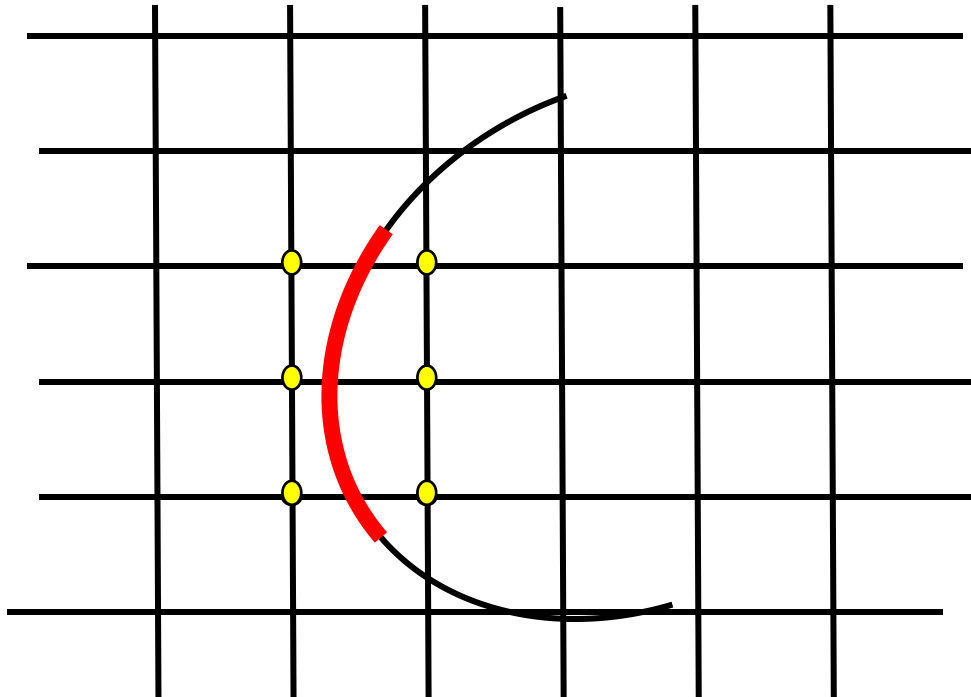


Discrétisation des conditions intégrales sur les électrodes

$$\int_{E_m} (\xi_m(U_m - u)) ds(x) + \varepsilon \delta_{m1} U_1 = I_m - \int_{E_m} g, \quad m = 1, \dots, M.$$

Nous discrétisons sur chaque électrode avec une formule de quadrature du premier ordre basée sur une fonction de Dirac discrète (Peter Smereka 2005)

$$\sum_{P \in \Omega_h^*} \omega_P (\xi_m(P)(U_m - u_P)) + \varepsilon \delta_{m1} U_1 = I_m - \sum_{P \in \Omega_h^*} \omega_P g(P), \quad m = 1, \dots, M.$$



Avec les poids suivants : (formule à l'ordre un)

$$\tilde{\delta}_{i,j} = \tilde{\delta}_{i,j}^{(+x)} + \tilde{\delta}_{i,j}^{(-x)} + \tilde{\delta}_{i,j}^{(+y)} + \tilde{\delta}_{i,j}^{(-y)}$$

$$\tilde{\delta}_{i,j}^{(+x)} = \begin{cases} \frac{|\varphi_{i,j} D_x^0 \varphi_{i,j}|}{h^2 |D_x^+ \varphi_{i,j}| \|\nabla_0^\varepsilon \varphi_{i,j}\|} & \text{si } \varphi_{i,j} \varphi_{i+1,j} \leq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\tilde{\delta}_{i,j}^{(-x)} = \begin{cases} \frac{|\varphi_{i-1,j} D_x^0 \varphi_{i,j}|}{h^2 |D_x^- \varphi_{i,j}| \|\nabla_0^\varepsilon \varphi_{i,j}\|} & \text{si } \varphi_{i,j} \varphi_{i-1,j} \leq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\tilde{\delta}_{i,j}^{(+y)} = \begin{cases} \frac{|\varphi_{i,j+1} D_y^0 \varphi_{i,j}|}{h^2 |D_y^+ \varphi_{i,j}| \|\nabla_0^\varepsilon \varphi_{i,j}\|} & \text{si } \varphi_{i,j} \varphi_{i,j+1} \leq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\tilde{\delta}_{i,j}^{(-y)} = \begin{cases} \frac{|\varphi_{i,j-1} D_y^0 \varphi_{i,j}|}{h^2 |D_y^- \varphi_{i,j}| \|\nabla_0^\varepsilon \varphi_{i,j}\|} & \text{si } \varphi_{i,j} \varphi_{i,j-1} \leq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Convergence à l'ordre premier de la méthode de frontière immergée

Etape 1 : Monotonicité de la matrice de discrétisation

La matrice de discrétisation A_h du système linéaire est monotone, c'est-à-dire qu'elle est inversible et que toutes les valeurs de A_h^{-1} sont positifs.

Etape 2 : Etablir les estimations sur les fonctions de Green

Nous pouvons écrire la solution du problème discrétisé comme une somme des termes source multipliés par les valeurs des fonctions de Green discrètes

$$u_h(P) = \sum_{Q \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h} G_h(P, Q) (A_h u_h)(Q), \quad \forall P \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h.$$

Notre objectif est d'obtenir des majorants pour les fonctions de Green discrètes associées à la matrice résultant de la discrétisation afin de pouvoir évaluer la convergence du schéma numérique:

$$|\bar{u}(P) - u_h(P)| \leq O(h).$$

Pour h suffisamment petit, les bornes supérieures suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \sum_{Q \in \Omega_h \setminus \Omega_h^*} G_h(:, Q) &\leq O(1), \\ \sum_{Q \in \delta\Omega_h \cup E_h} G_h(:, Q) &\leq O(1), \\ \sum_{Q \in \Omega_h^*} G_h(:, Q) &\leq O(h). \end{aligned}$$

Convergence à l'ordre premier de la méthode de frontière immergée

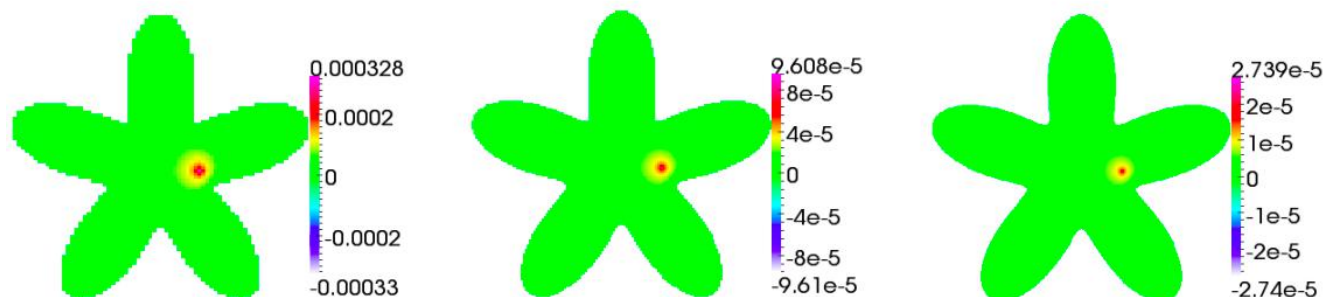
Pour chaque point Q de la discrétisation, on définit la fonction de Green discrète $G_h(P, Q)$ par :

$$A_h G_h(P, Q) = \begin{cases} 0, & P \neq Q \\ 1, & P = Q \end{cases}$$

Chaque $G_h(:, Q)$ est une colonne de A_h^{-1}

$$u_h(P) = \sum_{Q \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h} G_h(P, Q) (A_h u_h)(Q), \quad \forall P \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h.$$

Si A_h est monotone tous les coefficients de $G_h(:, Q)$ sont positifs



Exemples de fonction de Green discrète, 100^2 , 200^2 et 400^2 points.

Convergence à l'ordre premier de la méthode de frontière immergée

Montrer que la matrice est monotone :

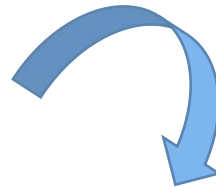
$$\forall y, \left((A_h y)_i \geq 0 \ \forall i \Rightarrow y_i \geq 0 \ \forall i \right)$$

Utiliser le principe du maximum discret et des fonctions ad hoc pour obtenir les estimations sur les sommes des coefficients de A_h^{-1}

$$\sum_{Q \in \Omega_h \setminus \Omega_h^*} G_h(:, Q) \leq O(1),$$

$$\sum_{Q \in \delta\Omega_h \cup E_h} G_h(:, Q) \leq O(1),$$

$$\sum_{Q \in \Omega_h^*} G_h(:, Q) \leq O(h).$$



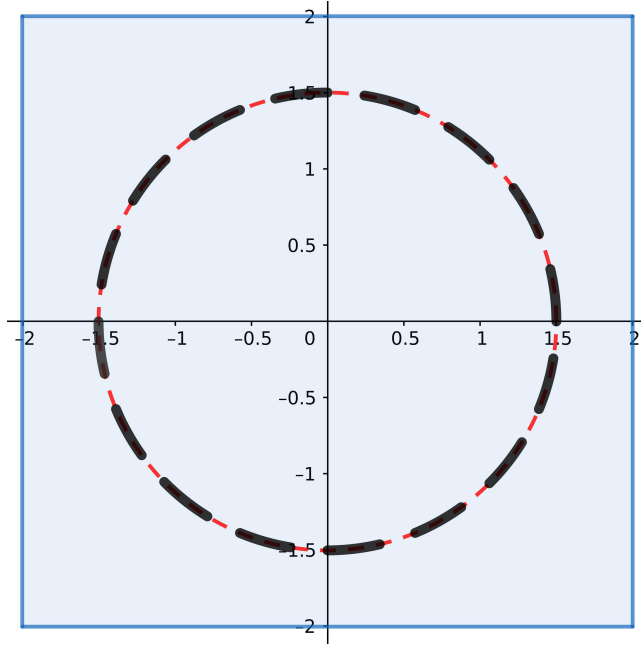
Soient S et \tilde{S} deux sous-ensembles de points, W une fonction discrète, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $i, j \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{cases} (A_h W)(P) \geq 0, & \forall P \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h \setminus \tilde{S}, \\ (A_h W)(P) \geq \alpha^{-i}, & \forall P \in S, \\ (A_h W)(P) \geq -(\beta^{-j}), & \forall P \in \tilde{S}. \end{cases}$$

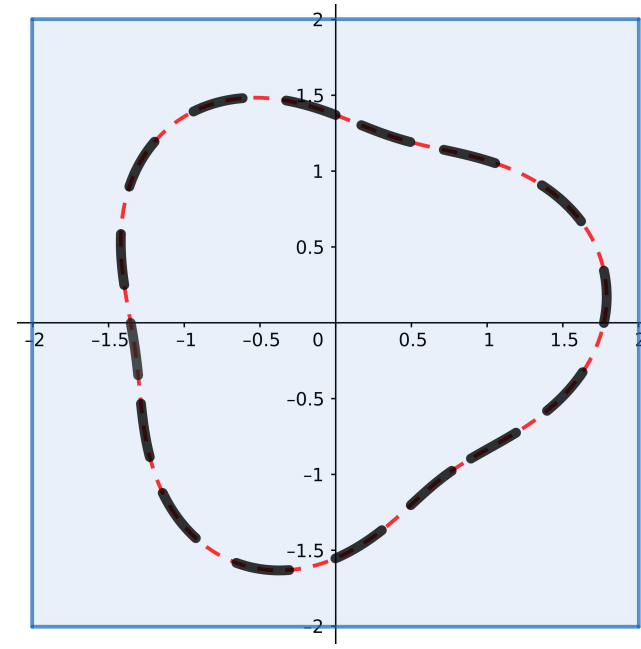
Alors

$$\sum_{Q \in S} G_h(P, Q) \leq \alpha^i W(P) + \alpha^i \beta^{-j} \sum_{Q \in \tilde{S}} G_h(P, Q), \quad \forall P \in \Omega_h \cup \delta\Omega_h \cup E_h.$$

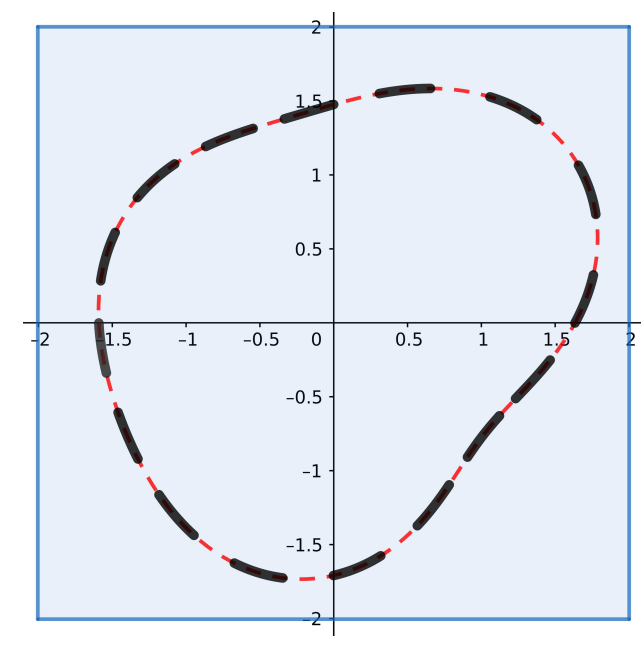
Résolution numérique du problème direct : choix géométrique



Géométrie 1

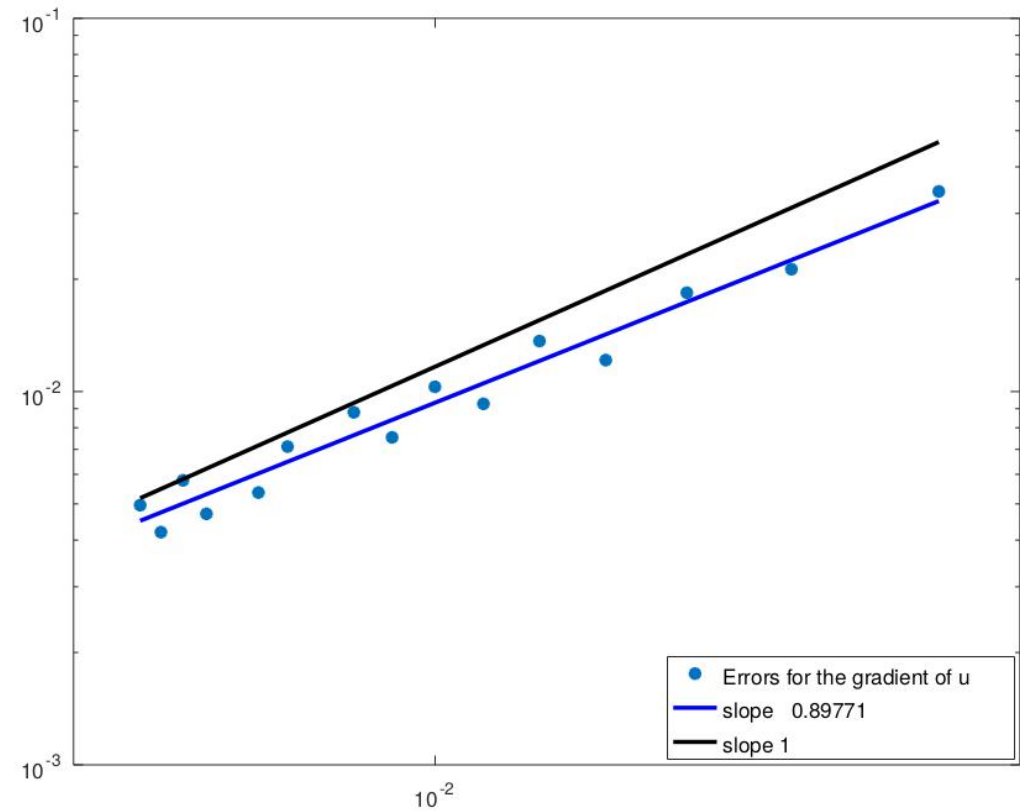
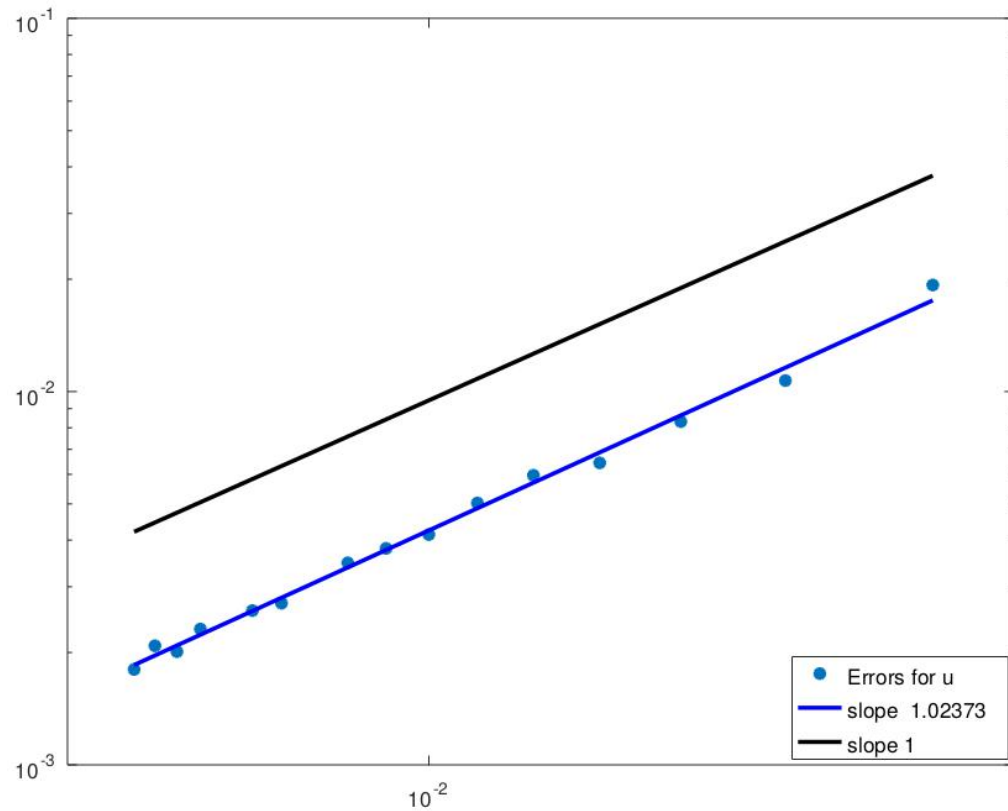


Géométrie 2



Géométrie 3

Convergence numérique : Géométrie 1.



Étude de la convergence avec une solution manufacturée $u(x, y) = \sin(xy)$ et $U = 0$. On calcule une norme infinie sur les points de grille dans la géométrie 1. On dispose de 16 électrodes sur le bord.

Application : résolution de problèmes inverses

Application 1 : problème inverse de conductivité

On cherche à minimiser la fonctionnelle :

$$F(\sigma) = \frac{1}{2} \|U(\sigma, I) - U_{meas}\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\sigma - \sigma_\star\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Ici $\sigma_\star \in L^\infty \cap H^1(\Omega)$ conductivité de référence connue.

La stratégie de minimisation repose sur le fait que l'application $M : \sigma \longrightarrow (u(\sigma, I), U(\sigma, I))$ est Fréchet-différentiable

Plus précisément, pour tout $\delta\sigma$ dans $L^\infty \cap H^1(\Omega)$ tel que $\sigma + \delta\sigma \geq \tilde{c} > 0$ p.p. dans Ω , on a

$$M(\sigma + \delta\sigma) = M(\sigma) + (\delta u, \delta U) + o(\|\delta\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}),$$

où $\delta u \in H^1(\Omega)$ et $\delta U \in \mathbb{R}^M$, $\delta U_1 = 0$, sont les seules solutions du problème variationnel suivant :

Trouver $(u, U) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$ tels que pour tout $(v, V) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^M$, on ait

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \sum_m \int_{E_m} \xi_m (u - U_m)(v - V_m) \, ds(x) \\ + \varepsilon U_1 V_1 = - \int_{\Omega} \delta\sigma \nabla u(\sigma, I) \cdot \nabla v \, dx. \end{aligned}$$

Application 1 : problème inverse de conductivité

On cherche à minimiser la fonctionnelle :

$$F(\sigma) = \frac{1}{2} \|U(\sigma, I) - U_{meas}\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\sigma - \sigma_\star\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Ici $\sigma_\star \in L^\infty \cap H^1(\Omega)$ conductivité de référence connue.

La stratégie de minimisation repose sur le fait que l'application $M : \sigma \longrightarrow (u(\sigma, I), U(\sigma, I))$ est Fréchet-différentiable

Supposons que $\delta\sigma_n$ appartient à $L^\infty(\Omega)$. Il existe $T_n > 0$ tel que pour tout $t \in (0, T_n)$,

$$F(\sigma_n + t\delta\sigma_n) \leq F(\sigma_n).$$

Application 1 : problème inverse de conductivité

On cherche à minimiser la fonctionnelle :

$$F(\sigma) = \frac{1}{2} \|U(\sigma, I) - U_{meas}\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\sigma - \sigma_\star\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Ici $\sigma_\star \in L^\infty \cap H^1(\Omega)$ conductivité de référence connue.

La stratégie de minimisation repose sur le fait que l'application $M : \sigma \longrightarrow (u(\sigma, I), U(\sigma, I))$ est Fréchet-différentiable

Supposons que $\delta\sigma_n$ appartient à $L^\infty(\Omega)$. Il existe $T_n > 0$ tel que pour tout $t \in (0, T_n)$,

$$F(\sigma_n + t\delta\sigma_n) \leq F(\sigma_n).$$

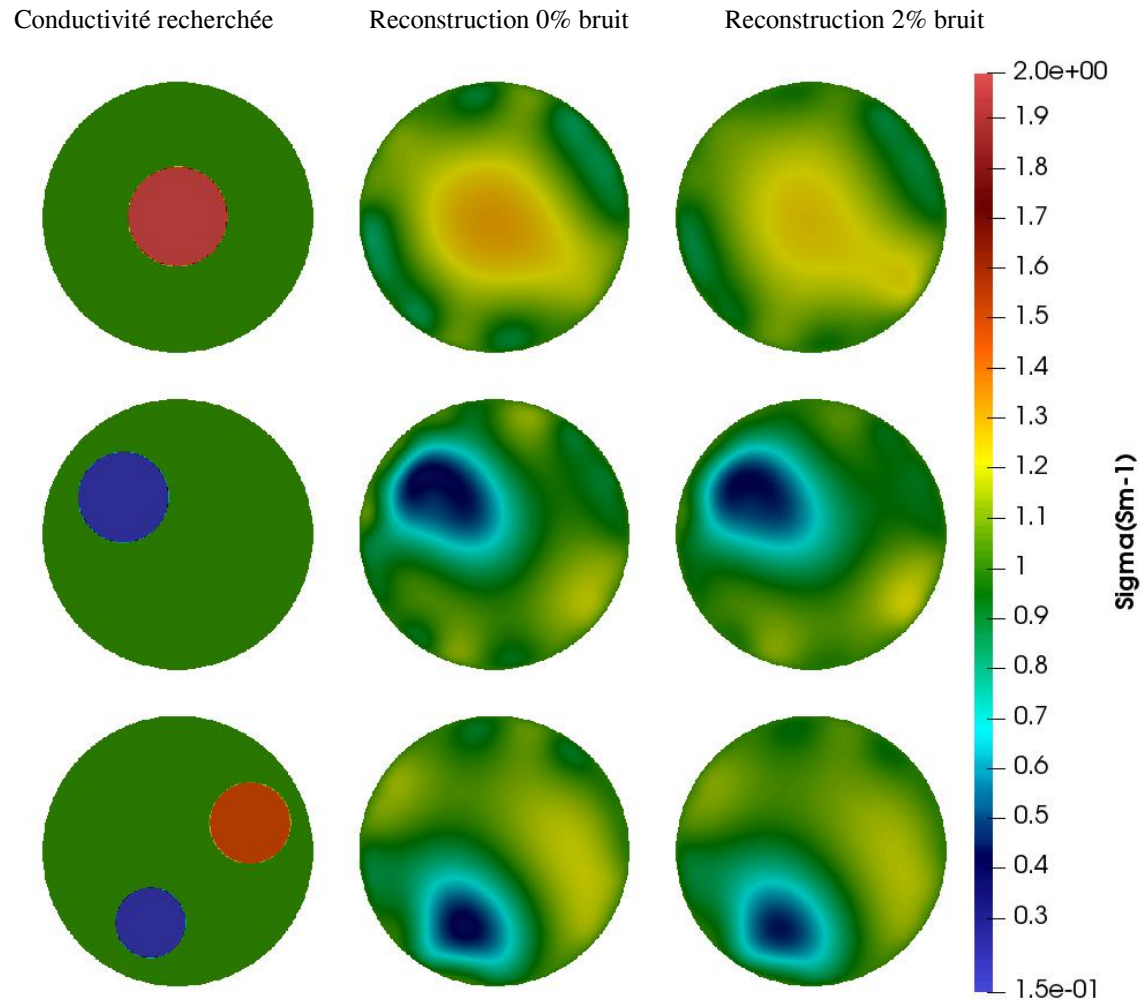
$\delta\sigma_n$ comme étant l'unique $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$-\Delta v + v = \epsilon(\Delta(\sigma_n - \sigma_\star) - (\sigma_n - \sigma_\star)) + d_x \mathbf{u}_n^T d_x \mathbf{w}_n + d_y \mathbf{u}_n^T d_y \mathbf{w}_n.$$

Pour une conductivité donnée σ_n , nous définissons $(d_x \mathbf{u}_n, d_y \mathbf{u}_n)$ par :

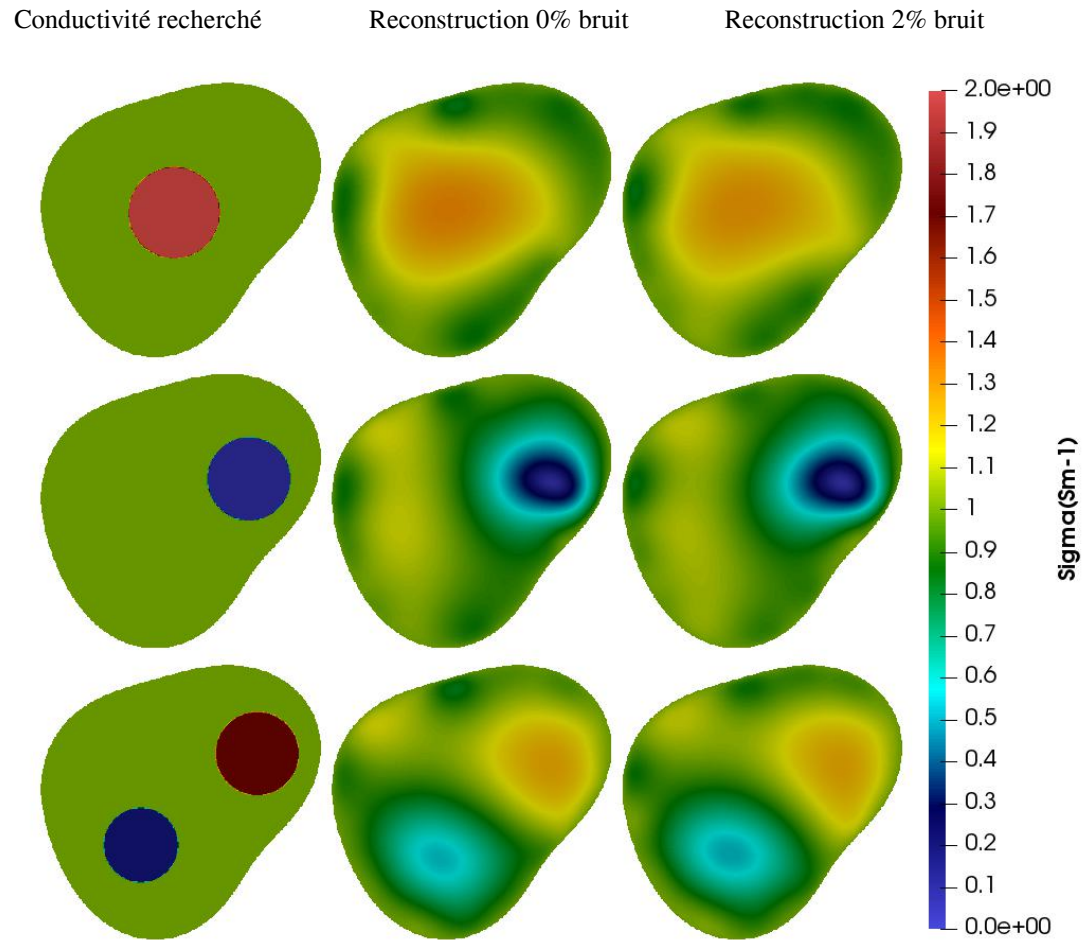
$$d_x \mathbf{u}_n = \left[\frac{\partial u(\sigma_n, I^1)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial u(\sigma_n, I^P)}{\partial x} \right] \in L^2(\Omega)^d, \quad d_y \mathbf{u}_n = \left[\frac{\partial u(\sigma_n, I^1)}{\partial y}, \dots, \frac{\partial u(\sigma_n, I^P)}{\partial y} \right] \in L^2(\Omega)^d.$$

Application 1 : problème inverse de conductivité



Reconstructions dans la géométrie 1. Première colonne : conductivité recherchée. Deuxième colonne : conductivité reconstruite avec des données non-bruitées . Troisième colonne : conductivité reconstruite avec des données bruitées .

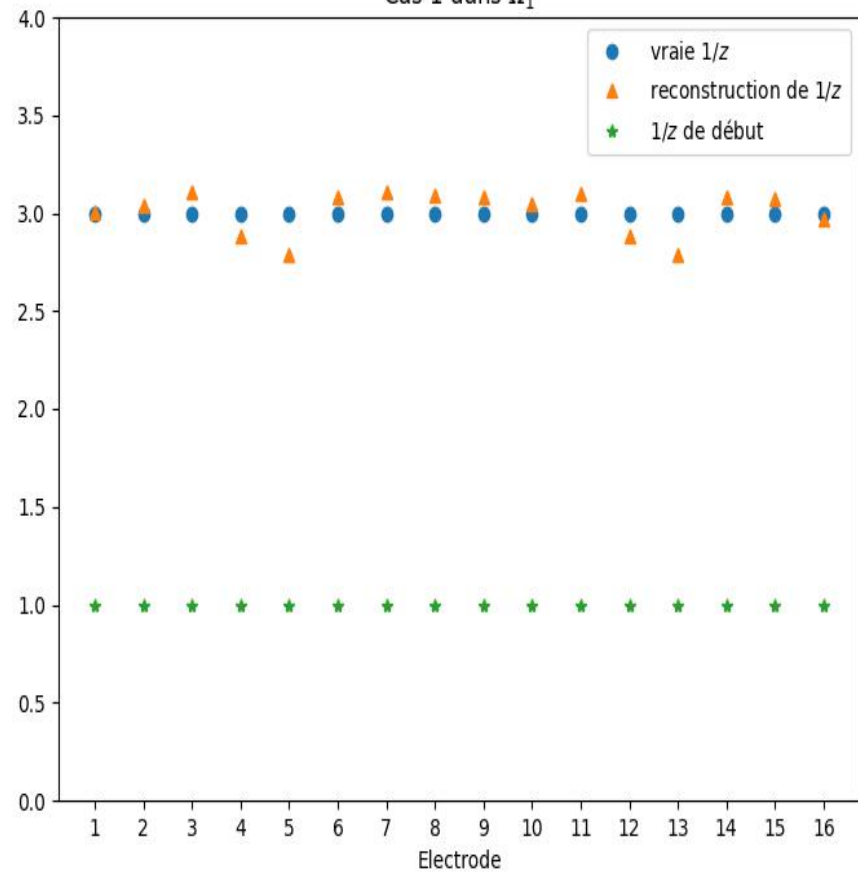
Application 1 : problème inverse de conductivité



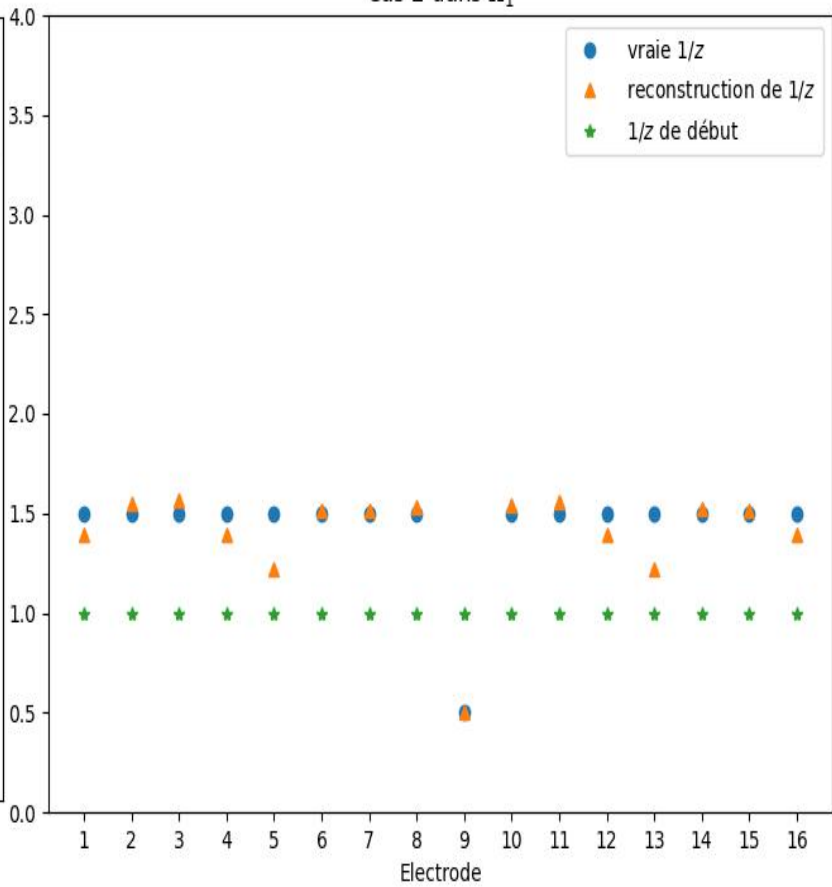
Reconstructions dans la géométrie 3. Première colonne : conductivité recherchée. Deuxième colonne : conductivité reconstruite avec des données non-bruitées . Troisième colonne : conductivité reconstruite avec des données bruitées .

Application 1 : problème inverse d'impédances de contact

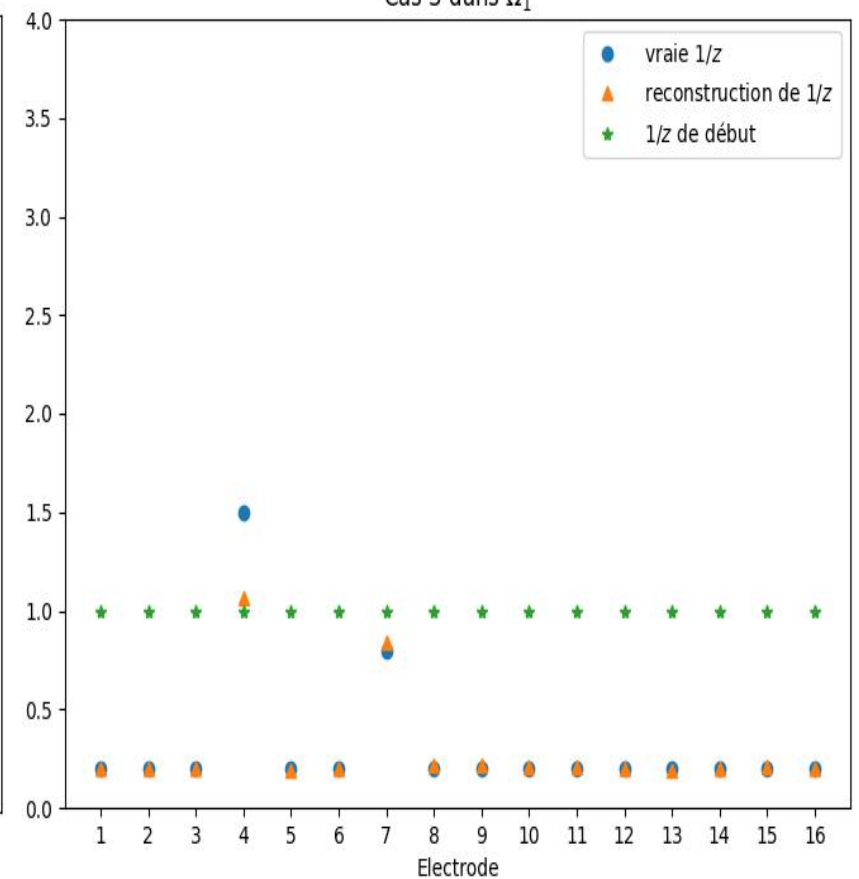
Cas 1 dans Ω_1



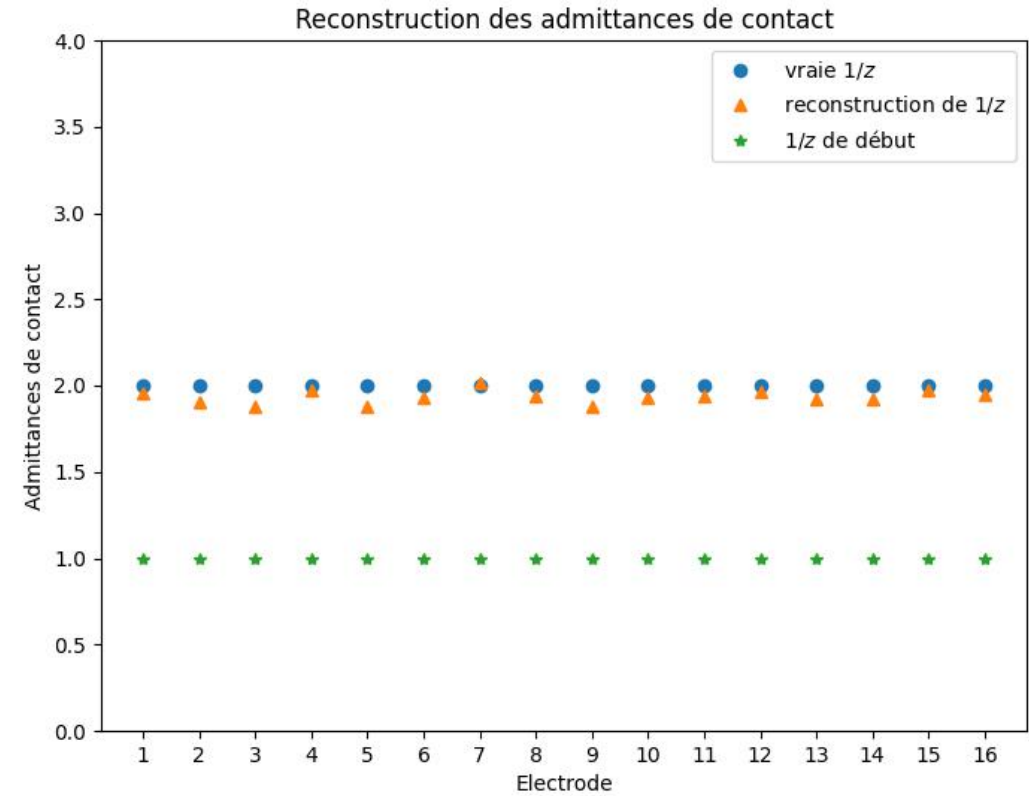
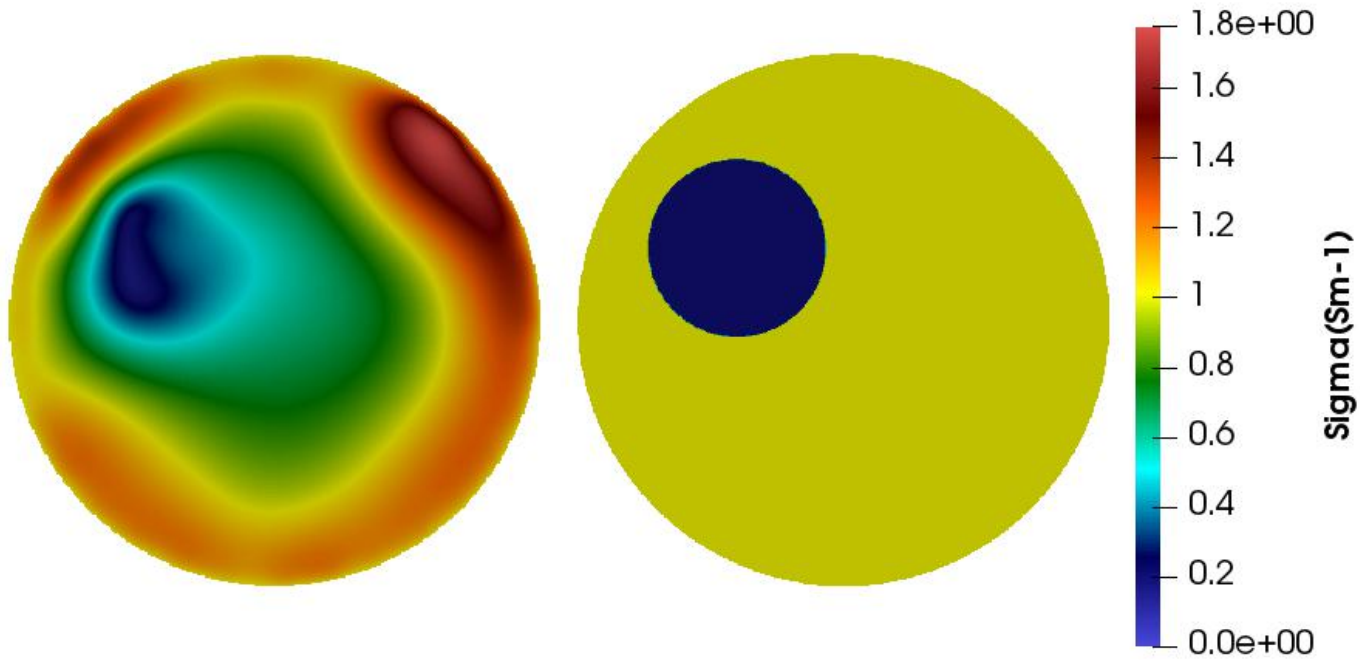
Cas 2 dans Ω_1



Cas 3 dans Ω_1

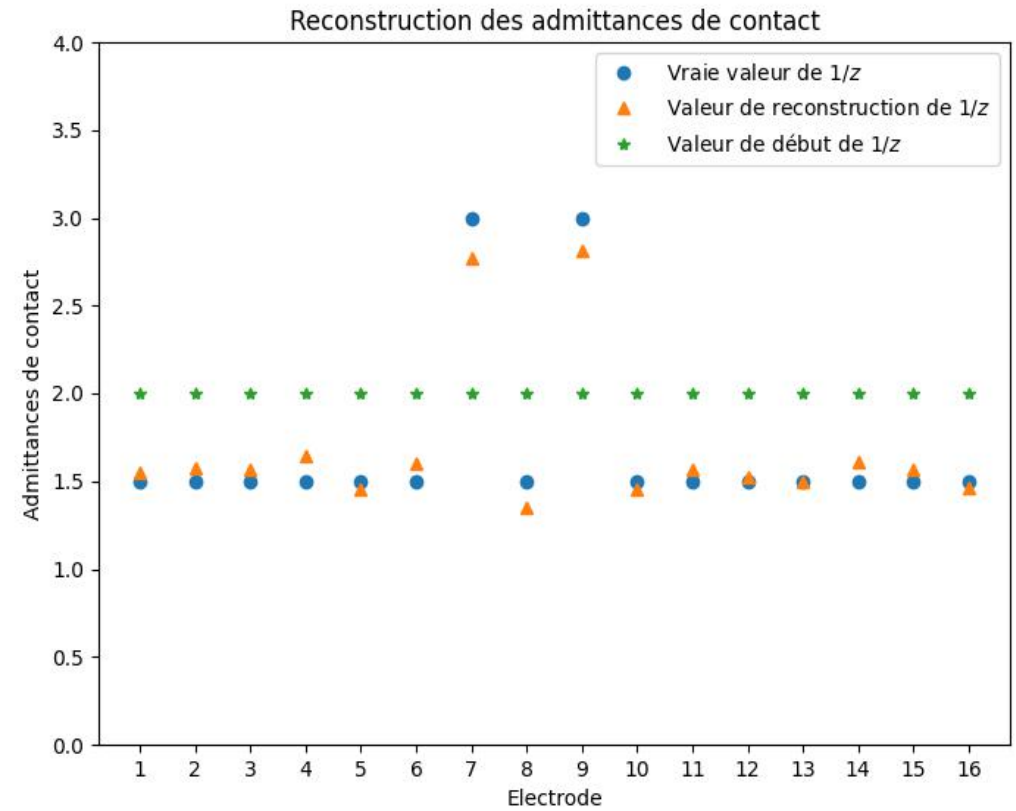
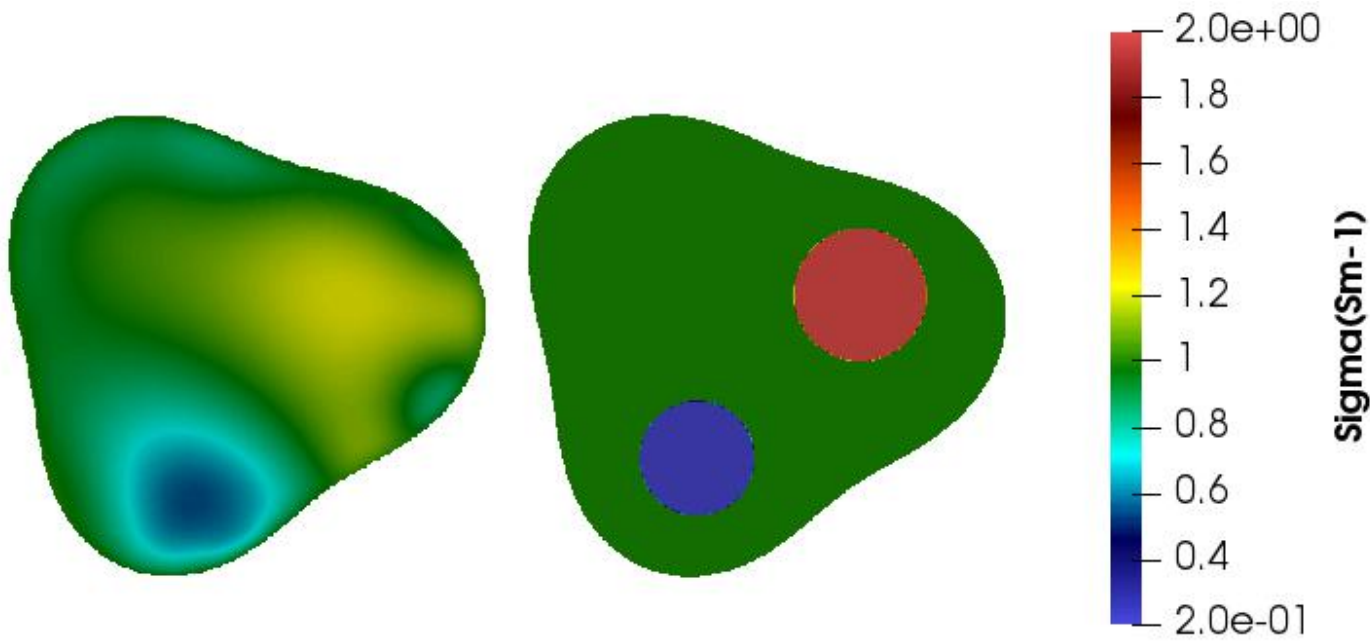


Application 1 : problème inverse de conductivité et impédances de contact



Reconstructions simultanées de la conductivité et de l'admittance de contact pour les différents cas dans la géométrie 1

Application 1 : problème inverse de conductivité et impédances de contact



Reconstructions simultanées de la conductivité et de l'admittance de contact pour les différents cas dans la géométrie 2

Application 2 : résolution du problème inverse de forme

Les paramètres liés à la géométrie du bord : $\partial\Omega = \{r(\theta)\mathbf{u}(\theta), \theta \in [0, 2\pi]\}$ avec $\mathbf{u}(\theta) = [\cos(\theta), \sin(\theta)]$, et

$$r(\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^N (\alpha_k \cos(k\theta) + \alpha_{k+N} \sin(k\theta)).$$

où le paramètre de forme $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2N}] \in \mathbb{R}^{2N+1}$ est choisi de telle manière que $0 < r(\theta) < 1$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$.

Pour les électrodes :

Les M électrodes, qu'on note par, E_1, \dots, E_M sont paramétrées par deux vecteurs $(\Theta^1, \Theta^2) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$ vérifiant

$$\Theta_1^1 < \Theta_1^2 < \Theta_2^2 < \dots < \Theta_M^2 < \Theta_1^1 + 2\pi,$$

tels que

$$E_m = \{r(\theta)\mathbf{u}(\theta), \theta \in [\Theta_m^1, \Theta_m^2]\}.$$

Application 2 : résolution du problème inverse de forme

Opérateur de mesure et dérivée de forme

L'idée consiste à dériver l'opérateur de mesure associé au CEM généralisé par rapport à un champ de vecteurs h associé à une certaine perturbation des variables de forme :

Pour $h \in C^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^d)$, nous définissons

$$F[h] : x \in \partial\Omega \mapsto x + h(x)$$

et

$$\partial\Omega_h = F[h](\partial\Omega).$$

Pour un h suffisamment petit, $\partial\Omega_h$ est la frontière d'un domaine lisse Ω_h , qui est une perturbation de Ω . On note que Ω_h est recouvert par M électrodes bien séparées $E_{m,h}$ définies par

$$E_{m,h} = \{x + h(x), x \in E_m\}.$$

Opérateur de mesure

$$R : (h, I) \in \mathcal{B}_d \times \mathbb{R}_\diamond^M \mapsto U(h),$$

avec

$$\mathcal{B}_d = \{h \in C^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^n); \|h\|_{C^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^d)} < d\},$$

d étant une constante fixe suffisamment petite.

Application 2 : résolution du problème inverse de forme

L'opérateur R est Fréchet-différentiable à l'origine par rapport à la première variable. En d'autres termes, il existe un opérateur bilinéaire borné

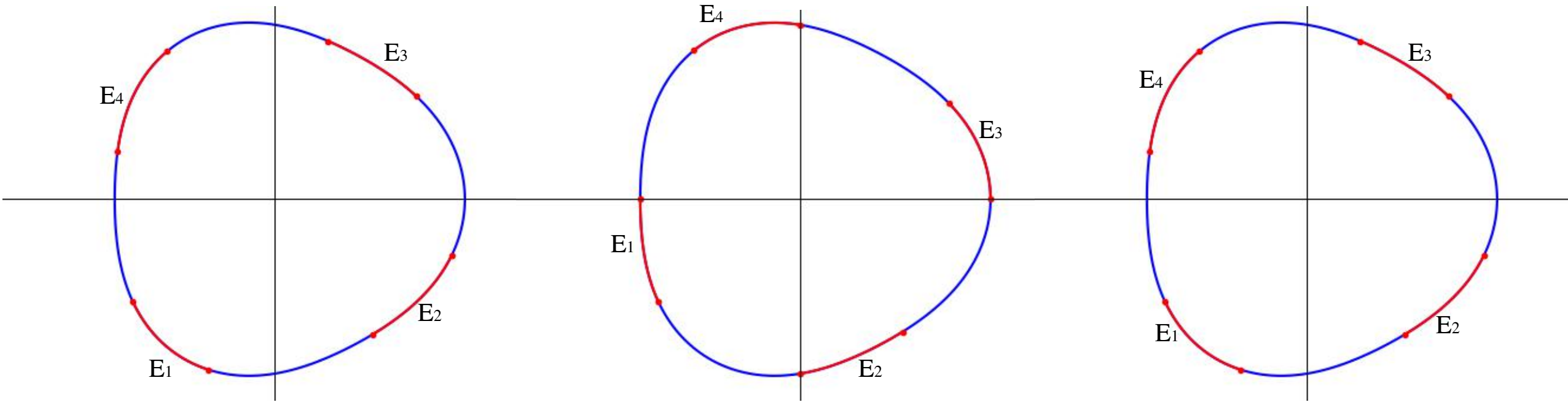
$$R' : C^1(\partial\Omega; \mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}_\diamond^M \mapsto \mathbb{R}^M$$

tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_{C^1}} \|R(h, \cdot) - R(0, \cdot) - R'h\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

$$\begin{aligned} ((R'h)I) \cdot \tilde{I} &= - \sum_{m=1}^M \int_{\partial E_m} (h \cdot \nu_{\partial E_m})(U_m - u)(\tilde{U}_m - \tilde{u}) ds(x) \\ &- \sum_{m=1}^M \frac{1}{z_m} \int_{E_m} h_\nu ((d-1)(U_m - u)H - \partial_\nu u) (\tilde{U}_m - \tilde{u}) ds(x) \\ &- \int_{\partial\Omega} h_\nu (\sigma \nabla u)_\tau (\nabla \tilde{u})_\tau ds(x). \end{aligned}$$

Application 2 : reconstruction de la position des électrodes

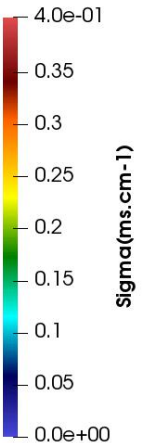
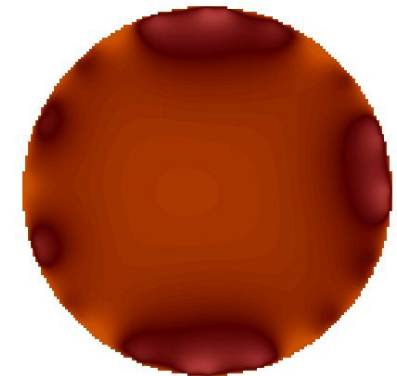
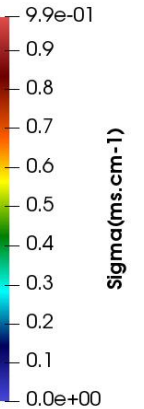
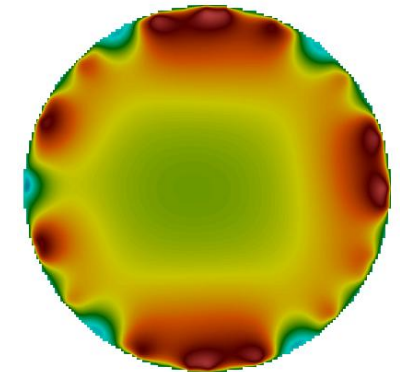
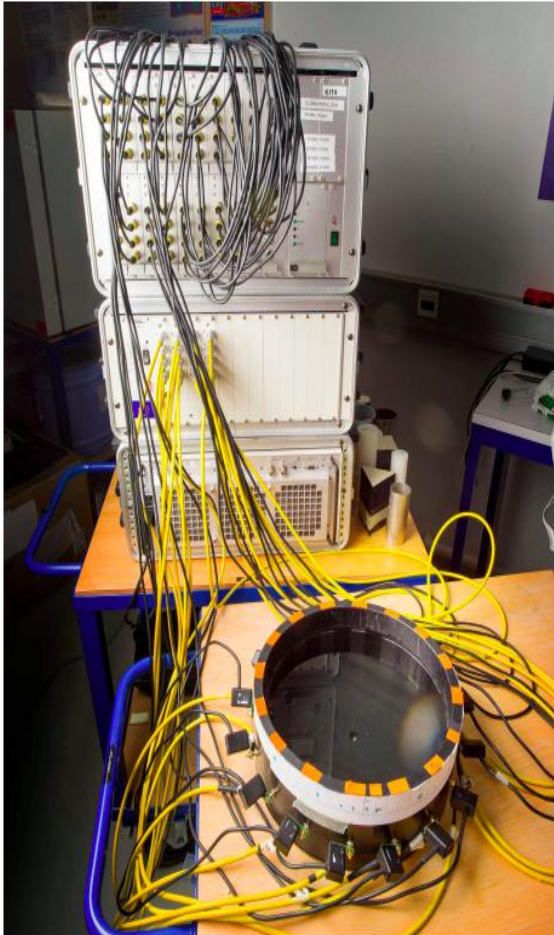


	Positions recherchées		Positions initiales		Positions reconstruites	
	θ^1	θ^2	θ^1	θ^2	θ^1	θ^2
E_1	-2.51327	-1.93817	-3.14159	-2.51358	-2.55152	-1.97563
E_2	-0.94247	-0.30516	-1.57079	-0.91229	-0.90298	-0.27141
E_3	0.62831	1.24343	0	0.57253	0.54018	1.14782
E_4	2.19911	2.84837	1.57079	2.18999	2.08957	2.72868

Vers des applications plus réalistes

Application 3: Reconstruction avec des données réelles

À droite : une configuration expérimentale pour la collecte de données EIT en 2D avec une configuration homogène et une autre avec deux inclusions plastiques. À gauche : le système de mesure KIT4 à l'Université de Eastern-Finland.



Reconstruction à l'aide de l'ensemble de données avec 16 électrodes

Conclusion et perspectives

- Résolution numérique de l'EIT à l'aide d'une méthode de frontière immergée.
 - Tester la résolution du problème inverse : conductivité - forme.
 - Développement de code parallèle pour l'EIT.
-
- Tester des algorithmes plus sophistiqués pour le problème inverse.
 - Développement de code pour le problème inverse.
 - Reconstruction avec des données réelles.

Merci pour votre attention :)

Modélisation du problème direct : Le CEM généralisé

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ et $U \in \mathbb{R}_\diamond^M$ tels que

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_\nu u = g & \text{sur } E_c, \\ \sigma \partial_\nu u + \xi_m (u - U_m) = g & \text{sur } E_m, \text{ pour } m = 1, \dots, M, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u \, ds(x) = I_m, & \text{pour } m = 1, \dots, M. \end{cases}$$

Avec E_m l'électrode m -ième, $\xi_m \in \mathcal{Z}_m$, où

$$\mathcal{Z}_m = \{\xi \in L^\infty(E_m), \xi \geq 0, \xi \neq 0\},$$

est l'admittance de contact, et $I \in \mathbb{R}_\diamond^M$ le schéma de courant avec

$$\mathbb{R}_\diamond^M = \left\{ I \in \mathbb{R}^M, \sum_{k=1}^M I_k = 0 \right\}.$$

- Ce modèle diffère légèrement du modèle standard : termes source non nuls à l'intérieur et au bord du domaine.
- Modèle utile pour les études numériques

Supposons que f , I et g vérifient :

$$\sum_{m=1}^M I_m + \int_{\Omega} f \, dx + \int_{E_c} g \, ds(x) = 0,$$

alors, le CEM généralisé admet une solution unique $(u, U) \in \mathcal{H}^1 = (H^s(\Omega) \times \mathbb{R}^M)/\mathbb{R}$.

Une formulation alternative pour fixer la constante

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ \sigma \partial_\nu u = g & \text{sur } E_c \\ \sigma \partial_\nu u + \xi_m (u - U_m) = g & \text{sur } E_m, \quad m = 1, \dots, M, \\ \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u \, ds(x) + \varepsilon \delta_{m1} U_m = I_m, & m = 1, \dots, M. \end{array} \right.$$

(J.Dardé, N.Nasr, L.Weynans
2023)

$$\int_{E_1} \sigma \partial_\nu u \, ds(x) + \varepsilon U_1 = I_1, \quad \int_{E_m} \sigma \partial_\nu u \, ds(x) = I_m, \quad \forall m \in \{2, \dots, M\}.$$

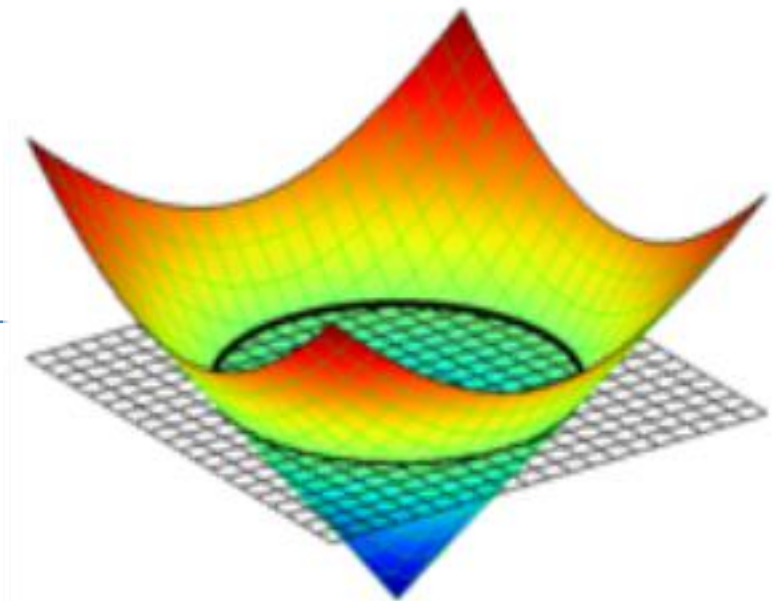
Le problème admet une solution unique $(u, U) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^d$.

Représentation implicite du bord : Level -set

$$\begin{cases} \varphi(x) < 0 & \text{si } x \in \Omega, \\ \varphi(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega, \\ \varphi(x) > 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Le vecteur normal unitaire $\nu(x)$ à $\partial\Omega$, pointant vers l'extérieur de Ω , peut s'exprimer en termes de φ comme suit:

$$\forall x \in \Gamma, \quad \nu(x) = \frac{\nabla\varphi(x)}{|\nabla\varphi(x)|}.$$



Convergence à l'ordre premier de la méthode de
frontière immergée

A_h matrice du système linéaire discrétisant le problème elliptique,
 u_h solution, f_h terme source

$$A_h u_h = f_h$$

Erreur d'approximation (consistance) :

$$\tau_h(P) = \begin{cases} O(h^2) \text{ pour l'opérateur elliptique sur les points réguliers,} \\ O(1) \text{ pour l'opérateur elliptique sur les points irréguliers,} \\ O(h) \text{ pour les conditions de flux sur les points d'interface,} \\ O(h) \text{ pour les intégrales sur les électrodes,} \end{cases}$$

L'erreur sur la solution numérique $e_h = u_h - U_{exacte}$ vérifie :

$$A_h e_h = \tau_h$$

$\Omega_h \setminus \Omega_h^* =$ Points réguliers, $\Omega_h^* =$ Points irréguliers, $\delta\Omega_h =$ Points d'interface,
 $E_h =$ Électrodes