Un schéma volumes finis pour les équations de Navier-Stokes quantique

Robin COLOMBIER, Ceramaths-UPHF - Valenciennes
Caterina CALGARO, Laboratoire Paul Painlevé - Lille
Emmanuel CREUSÉ, Ceramaths-UPHF - Valenciennes

On s'intéresse au système d'équations de Navier-Stokes quantique 1d avec amortissement :

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \partial_x(\rho u) = 0, \quad x \in \mathbb{T}, t > 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_x p(\rho) - 2\epsilon^2\rho\partial_x \dfrac{\partial_{xx}\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} - 2\nu\partial_x(\rho\partial_x u) + r\rho u = 0, \end{cases} \tag{1}$$

avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $u \in \mathbb{R}$, $p(\rho) = \rho^\gamma$, $\gamma > 1$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\nu \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Théorème 1. *En définissant* $v = \dfrac{\epsilon\partial_x\rho}{\rho}$ *et* $w = u + \dfrac{2\kappa\nu}{\epsilon}v$, $\kappa \in]0,1[$, *on obtient une inégalité de* κ*-entropie :*

$$\int_\Omega \partial_t\Big(\frac{\rho}{2}(w^2 + (\frac{4\kappa\nu(1-\kappa)}{\epsilon^2} + 1)v^2) + \frac{\rho^\gamma}{\gamma-1} + 2r\nu\kappa\rho ln(\rho)\Big)dx$$
$$+ \int_\Omega \Big(2\kappa\nu\gamma\rho^{\gamma-2}(\partial_x\rho)^2 + 2\nu(1-\kappa)\rho(\partial_x w - \frac{4\kappa\nu}{\epsilon}\partial_x v)^2 + 2\kappa\nu\rho(\partial_x v)^2 + r\rho(w - \frac{2\kappa\nu}{\epsilon}v)^2\Big)dx \leq 0. \tag{2}$$

Il s'agit de la formulation 1d d'un résultat plus général présenté dans [2].

Dans ce travail, on considère un système équivalent à (1) dont les variables sont (ρ, w, v) :

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \partial_x(\rho w) = 2\kappa\nu\partial_{xx}\rho, \\ \partial_t(\rho w) + \partial_x(\rho w^2 + \rho^\gamma + 2\kappa\nu r\rho) \\ \quad = 2\kappa\nu\partial_x(w\partial_x\rho) + 2\nu(1-\kappa)\partial_x(\rho\partial_x w) + (\epsilon - \dfrac{4\kappa\nu^2(1-\kappa)}{\epsilon})\partial_x(\rho\partial_x v) - r\rho w + 4r\kappa\nu\partial_x\rho, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v w) = 2\kappa\nu\partial_x(v\partial_x\rho) - \epsilon\partial_x(\rho\partial_x w) + 2\kappa\nu\partial_x(\rho\partial_x v). \end{cases}$$

En se basant sur un splitting en temps comme celui proposé dans [1], on définit un schéma volumes finis permettant d'obtenir une inégalité de κ-entropie discrète similaire à celle du cas continu (2).

Nous présenterons également des résultats numériques dans les cas Euler quantique ($r = \nu = 0$) et Navier-Stokes quantique avec et sans amortissement.

[1] D. Bresch, N. Cellier, F. Couderc, M. Gisclon, P. Noble, G.-L. Richard, C. Ruyer-Quil, J.-P. Vila. *Augmented skew-symmetric system for shallow-water system with surface tension allowing large gradient of density.* Journal of Computational Physics, **419**, 109670, 2020. doi : https ://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109670.

[2] D. Bresch, M. Gisclon, I. Lacroix-Violet, A. Vasseur. *On the exponential decay for compressible Navier-Stokes-Korteweg equations with a drag term.* J. Math. Fluid Mech., **24(1)**, Paper No. 11, 16, 2022. doi :10.1007/s00021-021-00639-2.

Contact : `robin.colombier@uphf.fr`