Preuves assistées par ordinateur de non-atteignabilité pour des systèmes de contrôle linéaires

Ivan HASENOHR, MAP5 - Paris **Camille POUCHOL**, MAP5 - Paris
Yannick PRIVAT, IUF,Université de Lorraine - Nancy
Christophe ZHANG, Université de Lorraine - Nancy

On s'intéresse à un problème de contrôle linéaire autonome sous contraintes : pour un temps $T > 0$ fixé, $\mathcal{U}$ un ensemble compact de contraintes, et le système contrôlé suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) & \forall t \in [0,T] \\ y(0) = y_0 & \\ u(t) \in \mathcal{U} & \forall t \in [0,T]. \end{cases}$$

Au temps final, la formule de Duhamel permet la réécriture de la solution de ce système sous la forme :

$$y(T;u) = S_T y_0 + L_T u,$$

où S_T désigne le semi-groupe associé à l'opérateur A et L_T l'opérateur entrée-sortie. Dans ce contexte, un problème classique est de vouloir prouver qu'aucun contrôle satisfaisant les contraintes mène le système vers un ensemble convexe d'états dangereux $\mathcal{Y}_f$, i.e. que

$$\forall u \in L^2(0,T;\mathcal{U}), \qquad y(T;u) \notin \mathcal{Y}_f$$

Le contrôle prenant des valeurs bornées, le système n'est pas contrôlable, et de plus, l'ensemble atteignable est rarement connu explicitement. Pour vérifier la non-atteignabilité de $\mathcal{Y}_f$, nous développons une méthode numérique produisant, s'il existe, un hyperplan séparant l'ensemble atteignable de $\mathcal{Y}_f$. Cette méthode s'appuie sur la minimisation de la fonctionnelle

$$J(p_f) = \int_0^T \sigma_{\mathcal{U}}(L_T^* p_f(t))\mathrm{d}t + \sigma_{\mathcal{Y}_f}(-p_f) + \langle y_0, S_T^* p_f\rangle,$$

où $\sigma_{\mathcal{E}} : p_f \mapsto \sup_{x\in\mathcal{E}}\langle x, p_f\rangle$ désigne la fonction support d'un ensemble $\mathcal{E}$. On prouve alors que

$$\mathcal{Y}_f \text{ n'est pas atteignable si et seulement si } \exists\, p_f, \quad J(p_f) < 0.$$

La minimisation de cette fonctionnelle requiert, sauf dans des cas très spécifiques, sa discrétisation. La mise en place d'un schéma de preuve assistée par ordinateur nécessite donc le calcul de bornes d'erreurs totalement explicites, que nous fournissons dans plusieurs cas d'étude, ainsi qu'un contrôle des erreurs d'arrondis via de l'arithmétique d'intervalles, gérée par le logiciel INTLAB [2].

Les résultats présentés sont majoritairement issus de l'article en prépublication [1].

[1] I. Hasenohr, C. Pouchol, Y. Privat, C. Zhang. *Computer-assisted proofs of non-reachability for linear finite-dimensional control systems.* **(hal-04523794)**, 2024.

[2] S. M. Rump. *Intlab—interval laboratory.* In *Developments in reliable computing*, pp. 77–104. Springer, 1999.

Contact : ivan.hasenohr@math.cnrs.fr