Parcimonie et contrôle L^1-optimal pour des systèmes de contrôle linéaires

Pierre CAVARÉ, CRAN - Nancy **Marc JUNGERS**, CRAN - Nancy
Jérôme LOHÉAC, CRAN - Nancy

On considère le problème de transfert d'état, d'un système linéaire, donné par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x^0, \quad x(T) = x^1, \end{cases}$$

où l'état initial $x^0 \in \mathbb{R}^n$, la cible $x^1 \in \mathbb{R}^n$, le temps final $T > 0$ et les matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ sont donnés. Lorsque x^1 est accessible depuis x^0 en temps T, il est fréquent de chercher les *maximum hands-off* contrôles [4], i.e. les contrôles admissibles dont le support est de mesure de Lebesgue minimale : on note ce problème (P_0). Ici, on autorise des contrôles appartenant aux mesures de Radon et, plus précisément, on s'intéresse aux contrôles impulsifs [1] dont le support est de mesure de Lebesgue nulle. On peut alors montrer que le problème (P_0) admet une infinité de solutions sous forme de contrôles impulsifs que l'on peut approcher à l'aide d'une suite de contrôles admissibles de $L^1([0,T],\mathbb{R}^m)$. Parmi ces solutions impulsives, il est intéressant de sélectionner celle qui minimise la norme L^1, c'est-à-dire qui minimise la pondération des impulsions.
On considère alors (P_1), le problème de minimisation en norme L^1. Si on inclut les mesures de Radon dans la recherche de solutions de (P_1) et, sous l'hypothèse que x^1 soit accessible depuis x^0 en temps T, on peut montrer que la valeur minimale de la norme L^1 peut toujours être atteinte par des contrôles impulsifs. Comme pour (P_0), il n'y a pas de saut de Lavrentiev lorsqu'on étend la recherche de solutions de (P_1), de $L^1([0,T],\mathbb{R}^m)$ à l'ensemble des mesures de Radon : tout contrôle optimal impulsif peut être approché par une suite de contrôles admissibles de $L^1([0,T],\mathbb{R}^m)$.
On montrera aussi que (P_1) admet toujours une solution qui est la somme d'au plus $m\sum_{i=1}^m r_i$ impulsions de Dirac (où m est la dimension du contrôle et r_i le rang de la matrice de Kalman de la paire (A,B_i), avec B_i la $i^{\text{ème}}$ colonne de B). Enfin, à l'aide du principe du maximum de Pontryagin, on montrera que si A est inversible et toutes les paires (A,B_i) sont contrôlables, alors tous les minimiseurs de (P_1) sont des sommes finies d'impulsions.
Le reste de cette présentation est consacré à l'élaboration d'un algorithme fondé sur la méthode de descente par coordonnée [3] et les itérations de Bregman [2], qui permette d'approcher un contrôle impulsif optimal.

[1] A. Bressan, F. Rampazzo. *On differential systems with vector-valued impulsive controls.* Boll. Unione Mat. Ital., VII. Ser., B, **2(3)**, 641–656, 1988.

[2] J. Darbon, D. Goldfarb, S. Osher, W. Yin. *Bregman iterative algorithms for ℓ_1-minimization with applications to compressed sensing.* SIAM J. Imaging Sci., **1(1)**, 143–168, 2008. doi : 10.1137/070703983.

[3] Y. Li, S. Osher. *Coordinate descent optimization for l^1 minimization with application to compressed sensing ; a greedy algorithm.* Inverse Probl. Imaging, **3(3)**, 487–503, 2009. doi : 10.3934/ipi.2009.3.487.

[4] M. Nagahara, D. Nešić, D. Quevedo. *Maximum hands-off control : a paradigm of control effort minimization.* IEEE Trans. Autom. Control, **61(3)**, 735–747, 2016. doi :10.1109/TAC.2015.2452831.

Contact : `pierre.cavare@univ-lorraine.fr`