Études théorique et numérique de problèmes de perturbations singulières pour des équations elliptiques

David MALTESE, LAMA, Université Gustave Eiffel - Champs-sur-Marne
Chokri OGABI, LAMA, Université Gustave Eiffel - Champs-sur-Marne

Les phénomènes de perturbations singulières occupent une place importante dans l'analyse des équations aux dérivées partielles. On s'intéresse ici aux perturbations singulières anisotropes des problèmes elliptiques. En particulier, ces dernières modélisent des phénomènes de diffusion dont le paramètre physique ϵ tend vers zéro dans certaines directions de l'espace. Un prototype (voir [1] pour un cadre plus général) est donné par

$$-\epsilon^2\Delta_{X_1}u_\epsilon - \Delta_{X_2}u_\epsilon = f, \text{ dans } \Omega = \omega_1 \times \omega_2 \subset \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{N-q}, \text{ et } u_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{1}$$

Le problème limite associé est donné par

$$-\Delta_{X_2}u(X_1,\cdot) = f(X_1,\cdot), \text{ dans } \omega_2, \text{ et } u(X_1,\cdot) = 0 \text{ sur } \partial\omega_2.$$

Le cadre théorique du problème (convergence, taux de convergence, régularité ...) a été étudié dans les références suivantes [1], [2], [3], [4].
D'un point de vue numérique, une méthode d'éléments finis conforme fournit, à l'aide du lemme de Céa, une majoration d'erreur d'ordre $\frac{h}{\epsilon^4}$, ce qui est insatisfaisant dans la mesure où le paramètre ϵ est très petit. Cela nous a conduit à étudier la convergence uniforme en ϵ du schéma numérique, en utilisant un choix d'éléments finis, et en utilisant des résultats théoriques obtenus récemment. Nous avons obtenu une estimation de la forme

$$\|\nabla_{X_2}u_{\epsilon,h} - \nabla_{X_2}u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \le Ch^\alpha,$$

où $u_{\epsilon,h}$ est la solution du problème discret associé à (1), et C est une constante positive indépendante de h et de ϵ, et $\alpha = 1/3$ ou $1/5$ selon la régularité des données du problème [5].

Références

[1] M. Chipot. On some anisotropic singular perturbation problems. *Asymptot. Anal.* (2007) 55 : 125-144.

[2] C. Ogabi. On the L^p- theory of anisotropic singular perturbations of elliptic problems, *Communications on Pure and Applied Analysis*,15.4 :1157-1178, 2016.

[3] C. Ogabi. $W^{2,2}$interior convergence for some class of elliptic anisotropic singular perturbations problems, *Comp. Var. Ellip. Equ.*(2019), 64 : 574-585.

[4] D. Maltese, C. Ogabi. On some new results on anisotropic singular perturbations of second-order elliptic operators. *Com. Pur. App. Anal.* (2023), 22-2 : 639-667.

[5] D. Maltese, C. Ogabi. Uniform estimates for conforming Galerkin method for anisotropic singularly perturbed elliptic problems, *Applicable Analysis*, *Taylor and Francis* 1-22, 17 Jan 2024.

Contact : `chokri.ogabi@univ-eiffel.fr`