

Méthode numérique multi-échelles pour les équations de réaction-diffusion à coefficients oscillants

Albéric LEFORT, ENPC, INRIA - Champs-sur-Marne
Frédéric LEGOLL, ENPC, INRIA - Champs-sur-Marne
Claude LE BRIS, ENPC, INRIA - Champs-sur-Marne

Mots-clés : *Problème de réaction-diffusion, méthode des éléments finis multi-échelles, homogénéisation, problème aux valeurs propres.*

Nous étudions théoriquement et numériquement plusieurs approches pour approximer la solution du problème aux valeurs propres de l'équation de réaction-diffusion à coefficients oscillants :

$$\begin{cases} \sigma_\varepsilon u_\varepsilon - \varepsilon^2 \operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon & \text{in } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

où $A_\varepsilon = A(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ et $\sigma_\varepsilon = \sigma(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ sont des coefficients hautement oscillants, supposés périodiques pour nos résultats théoriques. L'inconnue est le couple $(u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ du premier vecteur propre et de la valeur propre pour l'équation (1). Cette équation est particulièrement utilisée pour modéliser le flux de neutrons dans le cœur d'un réacteur nucléaire en régime permanent, où les coefficients oscillants décrivent l'hétérogénéité du domaine (d'échelle caractéristique ε). Comme pour les problèmes multi-échelles, l'approximation numérique de la solution par des méthodes standards est trop coûteuse. Ici, nous mettons en œuvre une approche numérique utilisant la méthode des éléments finis multi-échelles ("MsFEM"), qui est une approche de discrétisation de Galerkin utilisant des fonctions de base pré-calculées, bien adaptées au problème d'intérêt. Comme ces fonctions de base sont des solutions de problèmes locaux, la tâche complexe consiste à trouver les bons problèmes locaux à résoudre. L'avantage de cette méthode repose sur le fait qu'une fois les fonctions de base précalculées, le couple $(u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ peut être obtenu en très peu de temps. De plus, les mêmes fonctions de base peuvent être utilisées pour dériver efficacement n'importe quel couple de valeurs propres/vecteurs propres de (1). Nous utilisons partiellement les résultats théoriques de l'homogénéisation dans un cadre périodique pour guider notre intuition afin de définir les fonctions de base appropriées produisant une méthode efficace de calcul du couple propre de (1).

Références :

- [1] G. Allaire and Y. Capdeboscq, *Homogenization of a spectral problem in neutronic multigroup diffusion*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 187 (2000) 91-117.
- [2] Y. Efendiev, T. Hou, *Multiscale Finite Element Method : Theory and Applications*, *Surveys Tutorials Appl. Math. Sci.* 4, Springer, New York, 2009.