Propriétés de non-contrôlabilité de l'équation de Grushin généralisée sur des variétés de dimension 2

Roman VANLAERE, CEREMADE - Paris

Dans cet exposé, nous allons nous intéresser aux propriétés de non-contrôlabilité interne de l'équation de la chaleur sur des variétés presque-Riemanniennes de dimension 2. Plus précisément, nous considérons des variétés pour lesquelles il existe une sous-variété de dimension 1, appelée singularité, le long de laquelle la métrique Riemannienne dégénère. Localement, autour de la singularité ou d'un point de celle-ci, les variétés seront supposées être difféomorphes à des ouverts Euclidiens de la forme $\Omega_x \times \Omega_y$, munis d'une métrique de type Grushin, pouvant être écrite sous la forme $G := dx^2 + \frac{1}{q(x)^2 r(y)^2} dy^2$. La structure sous-riemannienne sur M est donc au moins localement engendrée par les champs de vecteurs $\{\partial_x, q(x)r(y)\partial_y\}$. Si l'on munit M d'une mesure lisse non-singulière, écrite localement autour de la singularité comme $h(x)dxdy$, alors la restriction de sous-Laplacien dans un tel voisinage s'exprime en coordonnées comme $\frac{1}{h(x)}\partial_x(h(x)\partial_x) + q(x)^2\partial_y(r(y)^2\partial_y)$. Sous des hypothèses de similarité entre q et x^γ autour de 0, nous énonçons le théorème suivant de manière formelle.

Théorème 1. *[3, Théorème 1.4] Soit M une variété décrite comme ci-dessus.*

(i) Si $\gamma = 1$, et la zone de contrôle n'intersecte pas toute la singularité, et que dans le voisinage d'un point de la singularité, r est identiquement égale à 1, alors il existe un temps T^*, qui dépend de la distance sous-Riemannienne, tel que pour tout $T < T^*$, l'équation de la chaleur n'est pas controllable à zéro en temps T.

(ii) Si $\gamma > 1$, si la zone de contrôle est à une distance strictement positive de la singularité, et que cette dernière admet un voisinage difféomorphe à $\Omega_x \times \Omega_y$, alors l'équation de la chaleur n'est jamais controllable à zéro.

En particulier, nous montrons que les propriétés de non-contrôlabilité sur M sont héritées des propriétés de non-contrôlabilité sur des structures Euclidiennes, avec Ω_x un intervalle borné contenant 0 à l'intérieur. Dans le cas $\gamma = 1$, il s'agit de montrer que les résultats connus tiennent toujours ([1, 2]), et dans le cas $\gamma > 1$, nous démontrons qu'il n'y a jamais contrôlabilité. Il est à noter qu'au moyen d'un changement de variable élémentaire, cela revient à considérer l'opérateur $\tilde{G} := \partial_{xx} + q(x)^2\partial_y(r(y)^2\partial_y) + V(x)$. Enfin, nous montrons que le temps T^* donné par le théorème ci-dessus n'est en général pas optimal.

Théorème 2. *[3, Théorème 1.5] Soit $M = \mathbb{R}^2$. Supposons qu'il existe $L > 0$ tel que la zone de contrôle s'écrive $\omega = \omega_x \times \mathbb{R}^2$, avec $\omega_x = \mathbb{R} \setminus (-L, L)$, r est identiquement égal à 1 sur $\mathbb{R}$, $V \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, et enfin*

(i) $\partial_x^k q(0) = 0$ for all $k \in \{0, ..., \gamma - 1\}$, $\partial_x^\gamma q(0) > 0$, and $q(x) \neq 0$ for every $x \neq 0$,

(ii) il existe $\alpha, \beta > 0$, tel que pour tout $|x|$ suffisamment large, $q(x)^2 \geq \alpha |x|^\beta$,

(iii) il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $V(x) \geq M$, pour presque tout x

Alors, si $\gamma > 1$, l'équation de la chaleur associée à $\tilde{G}$ n'est jamais contrôlable, et si $\gamma = 1$, il existe $T^* > 0$, qui dépend de β, tel que l'équation ne soit contrôlable en aucun temps $T < T^*$.

[1] K. Beauchard, J. Dardé, S. Ervedoza. *Minimal time issues for the observability of Grushin-type equations.* Annales de l'Institut Fourier, **70(1)**, 247–312, 2020. doi :10.5802/aif.3313.

[2] J. Dardé, A. Koenig, J. Royer. *Null-controllability properties of the generalized two-dimensional baouendi-grushin equation with non-rectangular control sets*, 2022.

[3] R. Vanlaere. *Non null-controllability properties of the heat-like generalized grushin equation on 2d-manifolds.* Redaction in process, 2024.

Contact : `roman.vanlaere@dauphine.psl.eu`