Approximations effectives pour des équations elliptiques hautement oscillantes

Simon RUGET, ENPC & Inria - Champs-sur-Marne
Claude LE BRIS, ENPC & Inria - Champs-sur-Marne
Frédéric LEGOLL, ENPC & Inria - Champs-sur-Marne

Cet exposé traite de problèmes inverses dans un contexte multi-échelle. Le but est de reconstruire des coefficients effectifs (aux grandes échelles) pour des EDP elliptiques comportant plusieurs échelles d'intérêt. Les données dont on dispose sont certaines observables (solutions en tout point, moyennes telles que l'énergie du système, ...) correspondant à différents chargements (i.e. second membre de l'équation). On suppose en revanche ne pas avoir directement accès à la valeur des coefficients oscillants.

On se concentre sur l'équation de diffusion posée sur un ouvert borné Ω

$$-\mathrm{div}\,(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f \text{ dans } \Omega, \qquad u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{1}$$

où le paramètre ε représente l'échelle caractéristique de variation du coefficient de diffusion, qui est typiquement supposée petite devant la taille du domaine Ω. Sous réserve d'hypothèses sur le coefficient A_ε et dans la limite où le rapport d'échelle ε tend vers 0, la théorie de l'homogénéisation (voir [1]) stipule l'existence d'une équation limite prenant la forme d'une équation de diffusion

$$-\mathrm{div}\,(A_\star \nabla u_\star) = f \text{ dans } \Omega, \qquad u_\star = 0 \text{ sur } \partial\Omega \tag{2}$$

et faisant intervenir un *coefficient homogénéisé* $A_\star$ constant. En toute généralité, il est difficile d'avoir accès au coefficient $A_\star$. Dans certains cas particuliers (cas de coefficients oscillants périodiques par exemple), $A_\star$ peut être déterminé numériquement (via le calcul des correcteurs), mais cela nécessite d'avoir un acccès complet au coefficient A_ε.

On se place maintenant dans le cadre des problèmes inverses, où on connait la solution u_ε de (1) (ou certaines observables de u_ε) pour plusieurs chargements f. Il est bien connu que la détermination de A_ε à partir de ces informations est un problème mal posé. L'objet de cet exposé est de présenter une méthodologie pour reconstruire un *coefficient effectif*. Cette méthodologie, basée sur un problème d'optimisation (voir [2,3] pour des premières approches dans cet esprit), s'inspire de la théorie de l'homogénéisation, mais a vocation à être plus générale (l'hypothèse de périodicité n'est pas fondamentalement requise, le rapport d'échelle n'a pas besoin d'être infiniment petit, ...).
Dans les cas où $A_\star$ peut être calculé, on compare nos résultats à ceux donnés par la théorie de l'homogénéisation. On montrera l'intérêt de l'approche en considérant en particulier des régimes où ε n'est pas infiniment petit, des cas où on ne dispose pas d'une information complète sur u_ε, ...

Mots clefs : Problème Inverse, Homogénéisation, Approximation Grossière

Références : [1] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, American Mathematical Society, 1978.
[2] C. Le Bris, F. Legoll, K. Li, *Approximation grossière d'un problème elliptique à coefficients hautement oscillants*, C. R. Acad. Sci. Paris, 2013.
[3] C. Le Bris, F. Legoll, S. Lemaire, *On the best constant matrix approximating an oscillatory matrix-valued coefficient in divergence-form operators*, Control, Optimisation and Calculus of Variations, 2018.

Contact : `simon.ruget@enpc.fr`