Peut-on entendre la forme d'une pièce ?

Antoine DELEFORGE, IRMA, univ. Strasbourg - Strasbourg
Cédric FOY, Cerema - Strasbourg
Yannick PRIVAT, IECL, univ. Lorraine et IUF - Nancy
Tom SPRUNCK, IRMA, univ. Strasbourg - Strasbourg

On considère le problème inverse consistant à retrouver la géométrie d'une salle à partir de mesures acoustiques. Plus précisément : étant donné une mesure en temps discret de la propagation d'une impulsion sonore depuis une source ponctuelle et omnidirectionnelle jusqu'à une antenne de microphones (appelée RIR ou *Room Impulse Response*), peut-on estimer la géométrie de la pièce ? Le champ de pression résultant d'une impulsion sonore émise au temps $t = 0$ et à la position $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$ est solution d'une équation des ondes avec un terme source Dirac, et les phénomènes d'absorption et de réflection des ondes sonores au niveau des murs sont généralement modélisées à l'aide de conditions au bord dites d'admittance [3] :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\partial_t^2 p(\boldsymbol{r},t) - \Delta p(\boldsymbol{r},t) = \delta_0(t)\delta_{\boldsymbol{r}_0}(\boldsymbol{r}) & (\boldsymbol{r},t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_{\boldsymbol{n}} p(\boldsymbol{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\beta(\boldsymbol{r},\cdot) * p(\boldsymbol{r},\cdot)(t) = 0 & (\boldsymbol{r},t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+. \end{cases} \tag{1}$$

En pratique on traite plutôt ce problème dans le domaine fréquentiel, ce qui revient à considérer une équation de Helmholtz à chaque nombre d'onde k avec des conditions au bord de type Robin, ou Neumann si l'on considère des parois parfaitement réfléchissantes :

$$\begin{cases} \Delta\widetilde{p}(\boldsymbol{r},k) + k^2\widetilde{p}(\boldsymbol{r},k) = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}^{\mathrm{src}}) & \boldsymbol{r} \in \Omega \\ \partial_{\boldsymbol{n}}\widetilde{p}(\boldsymbol{r},k) + ik\widetilde{\beta}\widetilde{p}(\boldsymbol{r},k) = 0 & \boldsymbol{r} \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

Le problème inverse est ainsi de retrouver la position des murs d'une salle polygonale ou polyhédrique à l'aide d'observations de la solution des systèmes (1) ou (2). Dans le cas de conditions de Neumann, la représentation du champ de pression fournie par la méthode dite des sources images [1] permet une résolution du problème à l'aide de techniques de super-résolution [5], au moins dans le cas de pièces rectangulaires. Dans le cadre de géométries polyhédriques quelconques, nous proposons de formuler cette question comme un problème d'optimisation de forme. Une difficulté de cette approche résulte du manque de régularité au niveau des sommets des polygones qui cause l'apparition de termes tangentiels dans la formule de dérivée de forme [4]. La méthode des solutions fondamentales permet une résolution numérique efficace et sans maillage du système (2) en 2D, sous réserve d'ajuster la base de solutions pour gérer les irrégularités [2], l'objectif final étant de mettre en place un algorithme itératif de descente de gradient de forme.

[1] J. B. Allen, D. A. Berkley. *Image method for efficiently simulating small-room acoustics.* Journal of the Acoustical Society of America, **65**, 943–950, 1976.

[2] P. R. Antunes, S. S. Valtchev. *A meshfree numerical method for acoustic wave propagation problems in planar domains with corners and cracks.* Journal of Computational and Applied Mathematics, **234(9)**, 2646–2662, 2010.

[3] M. Bruneau. *Fundamentals of acoustics.* John Wiley & Sons, 2013.

[4] A. Laurain. *Distributed and boundary expressions of first and second order shape derivatives in nonsmooth domains.* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, **134**, 328–368, 2020.

[5] T. Sprunck, A. Deleforge, Y. Privat, C. Foy. *Gridless 3d recovery of image sources from room impulse responses.* IEEE Signal Processing Letters, **29**, 2427–2431, 2022.

Contact : `tom.sprunck@unistra.fr`