Inégalités de Carleman pour une poutre de Timoshenko et applications

Carole LOUIS-ROSE, LAMIA - Pointe-à-Pitre
Thomas NANCY, LAMIA - Pointe-à-Pitre
Louis TEBOU, Department of Mathematics and Statistics, FIU - Miami

Dans cet exposé, nous cherchons à démontrer des inégalités de Carleman pour une poutre de Timoshenko. L'un des résultats principaux que nous avons obtenu est le suivant :

Théorème 1. *Soit* $(u, v) \in [H^1(Q)]^2$ *solution du système de Mindlin-Timoshenko suivant :*

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - K(u_x + v)_x + p(x,t)\, u = \hat{\mathcal{P}}_1 u \ \text{sur}\ Q =]0,T[\times]0,L[, \\ \rho_2 v_{tt} - \sigma v_{xx} + K(u_x + v) + q(x,t)\, v = \hat{\mathcal{P}}_2 v \ \text{sur}\ Q, \\ u(0,.) = v_x(0,.) = 0 \ \text{sur}\ ]0,T[, \\ u_x(L,.) + v(L,.) = 0, \quad v_x(L,.) = 0 \ \text{sur}\ ]0,T[, \end{cases} \tag{1}$$

où $\rho_1, \rho_2, K, \sigma$ *sont des contantes strictement positives et* p, q *sont des fonctions mesurables bornées.*

Soit la fonction ϕ *définie sur* $\overline{Q}$ *par* $\phi(x,t) = \mu(x) - \gamma\left(t - \frac{T}{2}\right)^2 + K$, *où* $\mu \in C^2([0,L])$, $\gamma > 0$ *et* $K > 0$ *est une constante telle que* $\phi \geq 0$ *sur* $\overline{Q}$. *Soit la fonction poids* φ *définie sur* $\overline{Q}$ *par* $\varphi(x,t) = e^{\lambda\,\phi(x,t)}$ *avec* $\lambda > 0$.

Posons : $\alpha_0 = \min\left\{\dfrac{K}{\rho_1}, \dfrac{\sigma}{\rho_2}\right\}$ *et* $\mu_0 = \min\limits_{[0,L]} \mu_{xx}$.

On suppose que : $\dfrac{\alpha_0}{2}\mu_0 > \gamma$, $\quad \mu_x > 0$ *sur* $[0,L]$ *et* $T > \dfrac{2}{\mu_0\sqrt{\alpha_0}} \max\limits_{[0,L]} \mu_x$.
De plus, nous supposons : $\sqrt{2}\min\limits_{[0,L]} \mu_x > \max\limits_{[0,L]} \mu_x$.
Il existe alors $s_0 \geq 1$ *et* $C > 0$ *tels que, pour tout* $s \geq s_0$, *on ait l'inégalité de Carleman suivante :*

$$\begin{aligned} s\int_Q e^{2s\varphi}\left((v_t)^2 + (u_t)^2 + (v_x)^2 + (u_x)^2 + s^2(v^2 + u^2)\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &\leq C\int_Q e^{2s\varphi}\left((\hat{\mathcal{P}}_1 u)^2 + (\hat{\mathcal{P}}_2 v)^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ \leq Cs\int_0^T e^{2s\varphi(L,t)}\left(\chi^2(t)\left(v_t^2(L,t) + u_t^2(L,t)\right) + s^2\left(v^2(L,t) + u^2(L,t)\right)\right) \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{2}$$

où $\chi \in C^2([0,T])$ *est la fonction définie par*

$$\chi(0) = 0 = \chi(T) \ \text{et}\ \chi \equiv 1 \ \text{sur}\ [\epsilon T, (1-\epsilon)T] \ \text{avec}\ \epsilon \ \text{dans} \ \left]0, \frac{1}{2}\right[\ \text{proche de zéro.} \tag{3}$$

Pour démontrer cela, nous avons établi des inégalités de Carleman pour une équation des ondes en imposant des conditions homogènes soit de type Dirichlet ou Neumann mais uniquement en 0. Nous avons ensuite appliqué ces inégalités à notre système de départ.
Les résultats obtenus sont un complément à ceux de la littérature présente où pour le système de Mindlin-Timoshenko, les conditions au bord considérées sont de type Dirichlet-Dirichlet.
Ils font aussi suite aux travaux que nous avons déjà réalisés, où nous avions considéré le cas où les conditions au bord sont de type Dirichlet-Neumann.

Contact : `thomas.nancy@univ-antilles.fr`