Etude du spectre de l'équation de McKendrick semi-discrétisée

Laurent ATTIAS, Laboratoire Jacques-Louis Lions - Paris
Vincent SIESS, Dassault Systèmes - Vélizy-Villacoublay
Stéphane LABBÉ, Laboratoire Jacques-Louis Lions - Paris

L'équation de McKendrick (1) est centrale en dynamique des populations et en modélisation de la démographie [1, 2]. Elle traite le problème d'une population soumise à des processus de vieillissement, natalité et mortalité.

$$\begin{cases} \partial_t \phi(t,a) + \partial_a \phi(t,a) + \mu(a)\phi(t,a) = 0 \\ \phi(t,0) = \int_0^{+\infty} b(a)\phi(t,a)\,\mathrm{d}a \\ \phi(0,a) = \phi_0(a) \end{cases} \tag{1}$$

Il est possible d'enrichir cette équation afin d'introduire de nouveaux traits de structuration : zone géographique, sexe, revenu, niveau de santé, etc. Dans de précédents travaux, nous avons développé une méthode de modélisation agile pour la dynamique de populations, basée sur un formalisme étendu à partir de l'équation de McKendrick, afin de modéliser de façon systématique les populations structurées, puis de simuler numériquement leur dynamique. Concernant la simulation, l'approche employée consiste à générer des modèles de systèmes d'équations différentielles en langage Modelica [3]. Il faut donc appliquer une semi-discrétisation sur le terme $\partial_a \phi$ dans (1). On est amené à faire une étude de stabilité linéaire des points d'équilibre de ces systèmes, ce qui nous amène à l'examen de leurs propriétés spectrales.
On considère le système (2), problème aux valeurs propres associé à une semi-discrétisation de (1) en n classes d'âge.

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\Delta a_n}\psi_1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i\psi_i - \mu_1\psi_1 = \lambda\psi_1 \\ -\dfrac{\psi_i - \psi_{i-1}}{\Delta a_n} - \mu_i\psi_i = \lambda\psi_i, \quad 2 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \dfrac{\psi_{n-1}}{\Delta a_n} - \mu_n\psi_n = \lambda\psi_n \end{cases} \tag{2}$$

La nature du spectre de l'opérateur associé à l'EDP (1) est traitée dans [4]. Dans le cas du problème discrétisé (2), nous avons pu montrer que les valeurs propres adoptent une répartition en cercle quand le nombre de classes d'âge devient grand.

Théorème 1. *On suppose μ et b constantes par morceaux. Alors, pour tout point z du cercle unité, il existe une suite de valeurs propres λ_n solutions de* (2)*, telles qu'en posant $z_n = 1 + \Delta a_n \lambda_n$, on a $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z$.*

[1] A. G. McKendrick. Applications of Mathematics to Medical Problems. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 44 :98–130, 1926.

[2] J. D. Murray. *Mathematical Biology : I. An Introduction*, volume 17 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer, third edition, 2002.

[3] P. Fritzson and V. Engelson. Modelica — A unified object-oriented language for system modeling and simulation. In Eric Jul, editor, *ECOOP'98 — Object-Oriented Programming*, pages 67–90, Berlin, Heidelberg, 1998. Springer Berlin Heidelberg.

[4] S. jian et al. Spectral properties of population operator and asymtotic behaviour of population semigroup. *Acta Mathematica Scientia*, 2(2) :139–148, 1982.

Contact : `laurent.attias@sorbonne-universite.fr`