

Etude paramétrique de la stabilité du schéma D1Q3 pour l'équation d'advection

CANUM 2024

Mini symposium

Méthode de Lattice Boltzmann et applications en mécanique des fluides

Thomas Bellotti - IRMA Strasbourg

Filipa Caetano - IMO Orsay

François Dubois - LMSSC CNAM Paris & IMO Orsay

Benjamin Graille - IMO Orsay

Motivations et présentation de l'exposé

Motivation : Étudier la convergence de schémas de Boltzmann sur réseau au sens des différences finies : étude de la consistance et de la stabilité.

- ▶ Étude algébrique de la stabilité (au sens de von Neumann) du schéma D1Q3 pour l'équation d'advection à vitesse constante, via l'algorithme de Cohn-Schur.

Présentation de l'exposé.

- ▶ Description du schéma.
- ▶ Stabilité de von Neumann.
- ▶ Cadre pour l'étude de la stabilité - algorithme de Cohn-Schur.
- ▶ L'exemple du schéma D1Q2.
- ▶ Résultats pour le D1Q3.
- ▶ Quelques simulations numériques.

Le schéma D1Q3 - formalisme de d'Humières

On considère :

- ▶ Δx pas d'espace ; réseau de points $\mathbb{Z}\Delta x$;
- ▶ Δt pas de temps, $t^n = n\Delta t$ instants discrets.

Vitesse caractéristique dans le réseau : $\lambda = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Schéma D1Q3 : d1 d'espace, 3 vitesses discrètes $-\lambda, 0, \lambda$.

Inconnues discrètes aux points du réseau :

- ▶ Fonctions de distribution f_-, f_0 et f_+ / moments u, v et w .

$$u = f_- + f_0 + f_+, \quad v = -\lambda f_- + \lambda f_+, \quad w = \frac{\lambda^2}{2} f_- + \frac{\lambda^2}{2} f_+.$$

Si $\mathbf{m} = (u, v, w)$, $\mathbf{f} = (f_-, f_0, f_+)$, $\mathbf{m} = M\mathbf{f}$, avec

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 0 & \lambda \\ \frac{\lambda^2}{2} & 0 & \frac{\lambda^2}{2} \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2\lambda} & \frac{1}{\lambda^2} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{\lambda^2} \\ 0 & \frac{1}{2\lambda} & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix}.$$

Algorithme du schéma D1Q3

- ▶ Définir $(f_-, f_0, f_+)(x, t + \Delta t)$ en fonction de $(f_-, f_0, f_+)(x, t)$ sur les points x du réseau $\mathbb{Z}\Delta x$, aux instants discrets $t = t^n$.
- ▶ **Étape de relaxation :**

$$u^*(x, t) = u(x, t)$$

$$v^*(x, t) = v(x, t) + s_v(v^{eq}(u(x, t)) - v(x, t))$$

$$w^*(x, t) = w(x, t) + s_w(w^{eq}(u(x, t)) - w(x, t)),$$

- s_v, s_w paramètres de relaxation pour les moments v et w .
- $v^{eq}(u) = c\lambda u$, $w^{eq}(u) = \frac{c^2}{2}\lambda^2 u$ équilibres des moments v et w .

- ▶ **Étape de transport :**

$$f_-(x, t + \Delta t) = f_-^*(x + \Delta x, t),$$

$$f_0(x, t + \Delta t) = f_0^*(x, t),$$

$$f_+(x, t + \Delta t) = f_+^*(x - \Delta x, t).$$

Consistance : Équations équivalentes

Équations équivalentes ([Dubois, 2008]) :

► **Ordre 1** : $\partial_t u + \partial_x v_{eq}(u) = \mathcal{O}(\Delta t), \quad v_{eq}(u) = \lambda c u.$

► **Ordre 2** :

$$\partial_t u + \partial_x v_{eq}(u) - \Delta t \sigma_v \partial_x \left((2w'_{eq}(u) - (v'_{eq}(u))^2) \partial_x u \right) = \mathcal{O}(\Delta t^2),$$

$$\sigma_v = 1/2 - 1/s_v.$$

► Choix $w^{eq}(u) = \frac{c^2}{2} \lambda^2 u \Rightarrow$ terme de diffusion d'ordre 1 nul.

Consistance à l'**ordre deux**, au sens des schémas de différences finies linéaires, avec l'équation d'advection

$$\partial_t u + c \lambda \partial_x u = 0.$$

Schéma LB \equiv schéma DF multi-pas ([Bellotti, Graille, Massot - 2022]).

Stabilité de von Neumann

- ▶ Étude de la stabilité du schéma D1Q3 au sens de von Neumann.
En Fourier :

$$\mathbf{f}_j^n := (f_-, f_0, f_+)(x_j, t^n),$$

$$\mathbf{f}^n := (\mathbf{f}_j^n)_{j \in \mathbb{Z}},$$

$$\hat{\mathbf{f}}^{n+1}(\xi) := G(\xi) \hat{\mathbf{f}}^n(\xi).$$

Matrice d'amplification : $G(\xi) = G(\xi; c, s_v, s_w, \lambda) = TM^{-1}RM$,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 0 & \lambda \\ \frac{\lambda^2}{2} & 0 & \frac{\lambda^2}{2} \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_v c \lambda & 1 - s_v & 0 \\ s_w c^2 \frac{\lambda^2}{2} & 0 & 1 - s_w \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} e^{i\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\xi} \end{bmatrix}.$$

Critère de stabilité : pour tout \mathbf{f}^0 , la suite $(\mathbf{f}^n)_n$ définie par $\hat{\mathbf{f}}^{n+1}(\xi) = G(\xi) \hat{\mathbf{f}}^n(\xi)$ est bornée dans L^2 .

Stabilité de von Neumann

$(f^n)_n$ bornée ssi pour tout $\xi \in [-\pi, \pi]$:

$|\mu| \leq 1$, pour tout μ valeur propre de $G(\xi)$

et

pas de bloc de Jordan associé à une valeur propre de module 1,

ssi

Pour toute racine r du polynôme minimal de $G(\xi)$:

– $|r| \leq 1$;

– si $|r| = 1$, r est une racine simple,

ssi

Le polynôme minimal de $G(\xi)$ est un *polynôme de von Neumann simple*.

L'algorithme de Cohn-Schur

Définitions. Soit $\varphi \in \mathbb{C}^n[z]$. On dit que φ est un polynôme de :

- Schur (S) si $|r| < 1$, pour toute racine r de φ .
- von Neumann (VN) si $|r| \leq 1$, pour toute racine r de φ .
- von Neumann simple (VNs) si $|r| \leq 1$, pour toute racine r de φ , et si ses racines de module 1 sont simples.

Si $\varphi(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, on définit :

$$\varphi^*(z) = \overline{a_0} z^n + \dots + \overline{a_{n-1}} z + \overline{a_n} = z^n \overline{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)},$$
$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{1}{z} (\varphi^*(0)\varphi(z) - \varphi(0)\varphi^*(z)).$$

Théorème (Cohn-Schur) ([Strikwerda - 2004]). Soit $\varphi \in \mathbb{C}^n[z]$.

- $\varphi \in S$ ssi $|\varphi(0)| < |\varphi^*(0)|$ et $\tilde{\varphi} \in S$
- $\varphi \in VNs$ ssi $(|\varphi(0)| < |\varphi^*(0)|$ et $\tilde{\varphi} \in VNs)$ ou $(\tilde{\varphi} \equiv 0$ et $\varphi' \in S)$
- $\varphi \in VN$ ssi $(|\varphi(0)| < |\varphi^*(0)|$ et $\tilde{\varphi} \in VN)$ ou $(\tilde{\varphi} \equiv 0$ et $\varphi' \in VN)$.

L'algorithme de Cohn-Schur

On étudie le polynôme caractéristique φ de $G(\xi)$, au lieu du polynôme minimal φ_0 :

$$\varphi \in \text{VNs} \implies \varphi_0 \in \text{VNs},$$

$$\varphi \notin \text{VNs} : \begin{cases} \varphi \notin \text{VN} \implies \varphi_0 \notin \text{VNs}, \\ \varphi \in \text{VN} \setminus \text{VNs} \longrightarrow \text{on étudie directement } G(\xi). \end{cases}$$

Polynôme caractéristique de $G(\xi)$:

$$\varphi(z) = \varphi(z; \xi, c, s_v, s_w) = \alpha_3 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0,$$

$$\alpha_3 = 1$$

$$\Re(\alpha_2) = -1 + c^2(1 + t_w)(1 - \cos(\xi)) + \cos(\xi)(t_v + t_w)$$

$$\Im(\alpha_2) = c(1 + t_v)(\sin(\xi))$$

$$\Re(\alpha_1) = t_v t_w - t_v(1 + t_w)^2 c^2(1 - \cos(\xi)) - \cos(\xi)(t_v + t_w)$$

$$\Im(\alpha_1) = c t_w(1 + t_v)(\sin(\xi))$$

$$\alpha_0 = -t_v t_w, \quad t_v = s_v - 1, \quad t_w = s_w - 1.$$

Un exemple plus simple - l'algorithme de Cohn-Schur pour le D1Q2

- ▶ Schéma D1Q2 \equiv D1Q3 avec deux vitesses λ_- , λ_+ .
Inconnues : moments (u, v) / fonctions de distribution (f_-, f_+) .
- ▶ **Matrice d'amplification pour le D1Q2 :**

$$G(\xi) = \begin{bmatrix} e^{i\xi} \left(1 - \frac{s}{2}(c+1)\right) & e^{i\xi} \frac{s}{2}(1-c) \\ e^{-i\xi} \frac{s}{2}(1+c) & e^{-i\xi} \left(1 + \frac{s}{2}(c-1)\right) \end{bmatrix}.$$

- ▶ **Polynôme caractéristique de $G(\xi)$:**

$$\varphi(z) = z^2 - \left(\cos(\xi)(2-s) - i \sin(\xi)sc\right)z + (1-s).$$

Un exemple plus simple - l'algorithme de Cohn-Schur pour le D1Q2

$$\varphi(z) = z^2 + (\cos(\xi)(s-2) + i \sin(\xi)sc)z + (1-s),$$

$$\varphi^*(z) = (1-s)z^2 + (\cos(\xi)(s-2) - i \sin(\xi)sc)z + 1,$$

$$\tilde{\varphi}(z) = (1 - (s-1)^2)z + ((s-1)^2 - 1)(\cos(\xi) - ic \sin(\xi)),$$

$$\varphi'(z) = 2z + (s-2)\cos(\xi) + ics \sin(\xi).$$

► Condition de Cohn-Schur d'ordre 0 :

- $\varphi \in \text{VNs}$ ssi ($|\varphi(0)| < |\varphi^*(0)|$ et $\tilde{\varphi} \in \text{VNs}$) ou ($\tilde{\varphi} \equiv 0$ et $\varphi' \in S$).
- $\varphi \in \text{VN}$ ssi ($|\varphi(0)| < |\varphi^*(0)|$ et $\tilde{\varphi} \in \text{VN}$) ou ($\tilde{\varphi} \equiv 0$ et $\varphi' \in \text{VN}$).

$$\left. \begin{array}{l} |\varphi(0)| < |\varphi^*(0)| \Leftrightarrow |s-1| < 1 \\ \tilde{\varphi} \equiv 0 \Leftrightarrow |s-1| = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{schéma pas stable si } |s-1| > 1.$$

Un exemple plus simple - l'algorithme de Cohn-Schur pour le D1Q2

► Condition de Cohn-Schur d'ordre 1.

► **Cas** $|\varphi(0)| < |\varphi^*(0)| \Leftrightarrow |s - 1| < 1$.

$\tilde{\varphi}$ polynôme de degré 1 $\Rightarrow \tilde{\varphi} \in \text{VNs}$ ssi $\tilde{\varphi} \in \text{VN}$.

Racine de $\tilde{\varphi}$: $r = \cos(\xi) - ic \sin(\xi)$.

$\tilde{\varphi} \in \text{VNs}$ pour tout ξ ssi $|c| \leq 1$: schéma stable.

► **Cas** $\tilde{\varphi} \equiv 0 \Leftrightarrow |s - 1| = 1 \Leftrightarrow s \in \{0, 2\}$. $\varphi' \in S$?

– $s = 0$. Racine de φ' : $r = \cos(\xi)$.

$s = 0 \Rightarrow |r| < 1$ pour tout $\xi \notin \{0, \pm\pi\}$.

$s = 0 \Rightarrow G(\xi)$ bornée.

$s = 0$: le schéma est stable.

– $s = 2$. Racine de φ' : $r = -ic \sin(\xi)$.

$s = 2, |c| < 1 \Rightarrow |r| < 1$ pour tout ξ .

$s = 2, |c| > 1 \Rightarrow$ il existe ξ t. q. $|r| > 1$.

$s = 2, |c| = \pm 1$: il existe ξ t. q. $G(\xi)$ non bornée.

$s = 2$: schéma stable ssi $|c| < 1$.

D1Q2 stable ssi $s = 0$ ou $s = 2, |c| < 1$ ou $s \in]0, 2[, |c| \leq 1$.

Résultats pour le D1Q3

- ▶ Cohn-Schur à l'ordre 0 : stabilité $\implies |t_v t_w| \leq 1, |c| \leq 1$;
- ▶ Cohn-Schur à l'ordre 1 : stabilité $\implies |t_v|, |t_w| \leq 1$;
- ▶ Cohn-Schur à l'ordre 2 : polynôme de degré 1 $\alpha_1^1 z + \alpha_0^1$;

$$|r| \leq 1 \text{ ssi } |\alpha_1^1| - |\alpha_0^1| \geq 0 \text{ ssi } \underbrace{P(t_v, t_w, c, \xi)}_{\geq 0} Q \geq 0, \text{ avec}$$

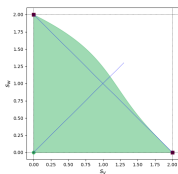
$$Q = A(\xi, t_v, t_w) + B(\xi, t_v, t_w)c^2 + C(\xi, t_v, t_w)c^4.$$

On a $A \geq 0$ et $A + B + C \geq 0$ ssi

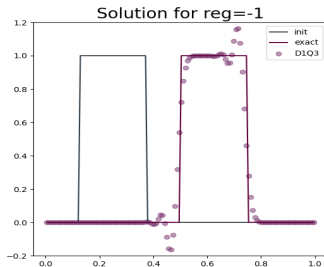
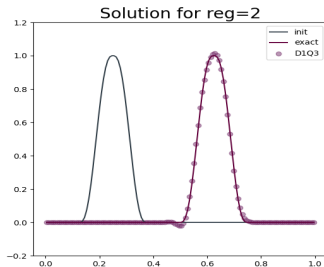
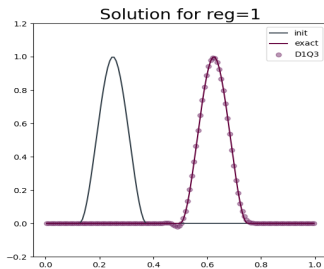
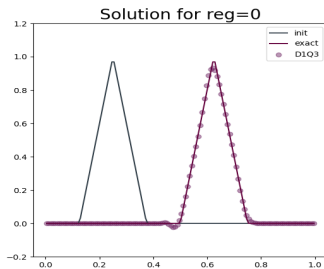
$$(t_v^2 - 6t_v + 1)t_w^2 + 4(1 - t_v)^2 t_w - (t_v^2 - 6t_v + 1) \leq 0$$



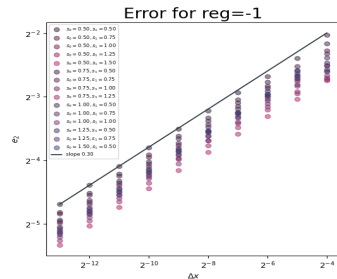
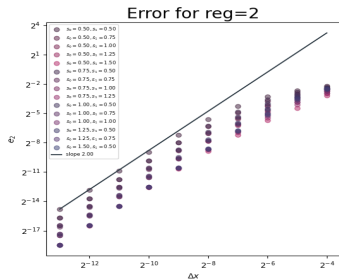
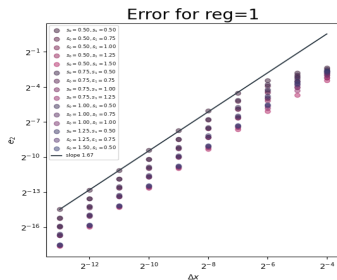
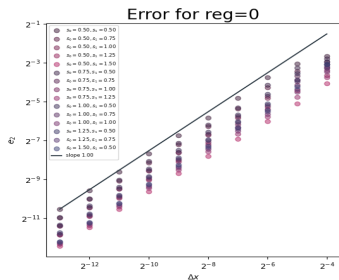
$$-1 \leq t_w \leq t_w^*(t_v).$$



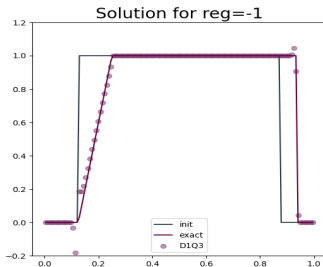
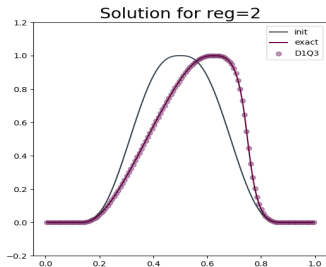
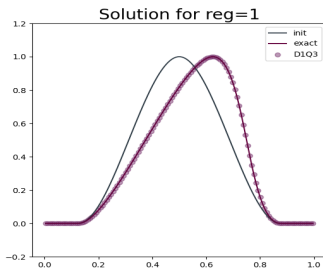
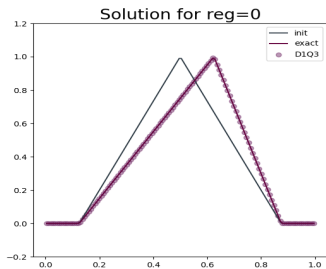
Simulations numériques - équation d'advection



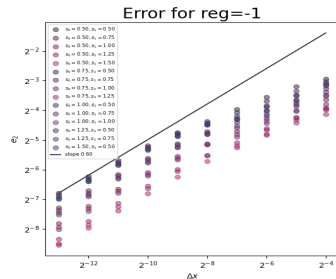
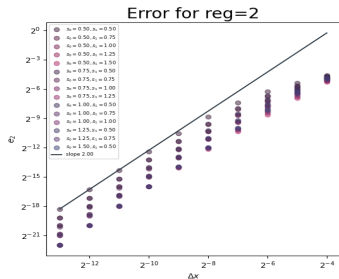
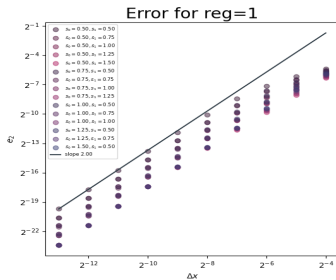
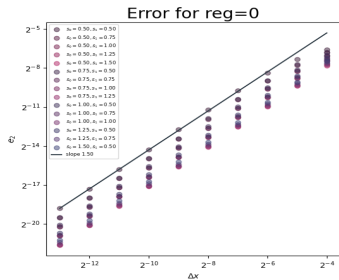
Simulations numériques - équation d'advection



Simulations numériques - équation de Burgers

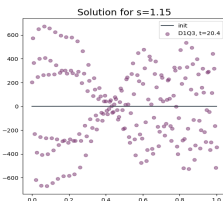
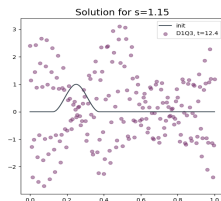
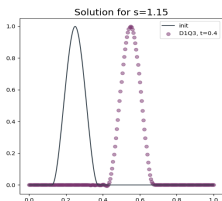
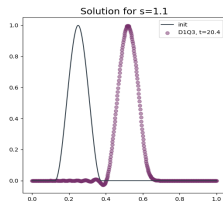
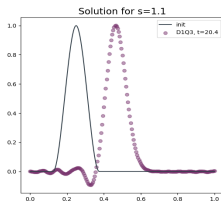
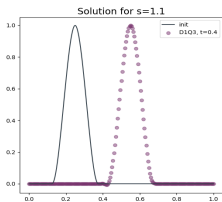


Simulations numériques - consistance (Burgers)



Simulations numériques - instabilité (cas $s_W = s_V$)

$$s := s_V = s_W : s \gtrsim 1.101$$



Conclusions / suite et perspectives

- ▶ Étude de la convergence du schéma D1Q3 au sens des différences finies. Description de la zone de stabilité en fonction des paramètres du schéma.
- ▶ Algorithme de Cohn-Schur donne la réponse sur la stabilité pour un jeu de paramètres donné : on peut l'utiliser pour d'autres schémas LBM.
- ▶ Résultats algébriques sur les racines/signe d'un polynôme en fonction de ses coefficients ?

Merci de votre attention !