Une preuve assistée par ordinateur pour un état stationnaire d'un modèle de chimiotaxisme

Maxime PAYAN, CMAP - Palaiseau

Dans cet exposé, on va parler du modèle de chimiotaxisme suivant (1) et de la méthode utilisée pour établir l'existence de solution.

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta\left(\gamma(v)u\right) + \sigma u(1-u) & \text{in } (0,\infty)\times\Omega, \\ \partial_t v = d\Delta v + u - v & \text{in } (0,\infty)\times\Omega, \\ \partial_n\left(\gamma(v)u\right) = 0 = \partial_n v & \text{on } (0,\infty)\times\partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

On étudie les états stationnaires de ce sytème, où la motilité γ est une fonction décroissante de la concentration de l'espèce chimique v agissant sur la concentration de l'espèce chimique u. Le paramètre logistique σ et le paramètre de diffusion d sont positifs. Afin de capter les différents équilibres qui parfois coexistent, on utilise une méthode assistée par ordinateur : Etant donné une solution numérique approchée $(\bar{u},\bar{v})$, on applique un théorème de point fixe dans un petit voisinage de $(\bar{u},\bar{v})$ pour prouver l'existence d'une solution théorique (u^*,v^*). Cela nous permet d'étudier rigoureusement les états stables du système (1) de manière plus approfondie que ce qu'il était possible de faire auparavant "à la main". Cette méthode repose sur la décomposition en série de Fourier de nos solutions, ce qui est commun dans la littérature, mais d'ordinaire cela reste restreint à des systèmes d'équations avec des non-linéarités polynnomiales (voir [1]). Ce n'est pas le cas ici, γ étant une fraction rationnelle ou une exponentielle décroissante. On présentera la manière de traiter ces non-linéarités non-polynomiales dans le contexte de preuves assistés par ordinateur avec les séries de Fourier. Plus précisemennt, on donnera la preuve et la méthodologie pour établir le Théorème 1, qui sont aussi dans l'article [2], en offrant plus de perspective.

Théorème 1. *Soient $\bar{u}$ et $\bar{v}$ les fonctions tracées sur la Figure 1. Ils existent des états staionnaires réguliers (u^*,v^*) du système 1 avec les données suivantes $\sigma = 0.053$, $d = 1$, $\Omega = (0,3\pi)$ and $\gamma(x) = \dfrac{1}{1+x^9}$. Cette solution, (u^*,v^*), vérifient*

$$\sup_{x\in\Omega}|u^*(x)-\bar{u}(x)| + \sup_{x\in\Omega}|v^*(x)-\bar{v}(x)| \leq 2.5197\times 10^{-8}.$$

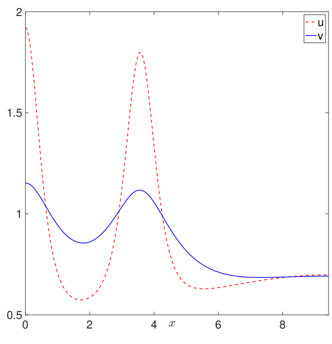

FIGURE 1 – Un état stationnaire approché de (1), associé au Théorème 1.

[1] M. Breden. *Computer-assisted proofs for some nonlinear diffusion problems.* Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **109**, 106292, 2022.

[2] M. Breden, M. Payan. *Computer-assisted proofs for the many steady states of a chemotaxis model with local sensing.* arXiv preprint arXiv :2311.13896, 2023.

Contact : `maxime.payan@polytechnique.edu`