Atteignabilité constructive pour les problèmes de contrôle linéaires sous contraintes de parcimonie

Camille Pouchol, Emmanuel Trélat, Christophe Zhang

MAP5, Université Paris Cité

CANUM 2024, vendredi 31 mai 2024

Problème de contrôle linéaire

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \qquad y(0) = y_0.$$

- $y(t) \in X$, $u(t) \in U$ Hilbert, $E := L^2(0, T; U)$
- $(A, D(A))$ opérateur générant un C_0 semigroupe sur X, noté $(S_t)_{t \geq 0}$
- $B \in L(U, X)$
- sous contraintes $P \subset U$

Problème de contrôle linéaire

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \qquad y(0) = y_0.$$

- $y(t) \in X$, $u(t) \in U$ Hilbert, $E := L^2(0, T; U)$
- $(A, D(A))$ opérateur générant un C_0 semigroupe sur X, noté $(S_t)_{t\geq 0}$
- $B \in L(U, X)$
- sous contraintes $P \subset U$

Différentes notions de P-atteignabilité (de y_f depuis y_0 en temps T) :

- approchée : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists u_\varepsilon \in L^2(0, T; P)$, $\quad \|y(T) - y_f\|_X \leq \varepsilon$,
- exacte : $\exists u \in L^2(0, T; P)$, $\quad y(T) = y_f$.

Problème de contrôle linéaire

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \qquad y(0) = y_0.$$

Notation :

$$y(T) = L_T u + S_T y_0, \quad L_T u := \int_0^T S_{T-t} Bu(t)\, dt.$$

Différentes notions de P-atteignabilité (de y_f depuis y_0 en temps T fixé) :

- approchée : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists u_\varepsilon \in L^2(0, T; P), \quad L_T u_\varepsilon \in \overline{B}\big(y_f - S_T y_0, \varepsilon\big)$,
- exacte : $\exists u \in L^2(0, T; P), \quad L_T u = y_f - S_T y_0$.

Contraintes coniques

Focus sur le cas où $P \subset U$ est un cône.

Motivation :

- contraintes de signe, $P = \{u \in U,\ u \geq 0\}$... convexes
- contraintes de parcimonie, $P = \{u \in U,\ |\mathrm{supp}(u)| \leq k\}$... pas convexes pour un sou

Contraintes coniques

Focus sur le cas où $P \subset U$ est un cône.

Motivation :

- contraintes de signe, $P = \{u \in U,\ u \geq 0\}$... convexes
- contraintes de parcimonie, $P = \{u \in U,\ |\mathrm{supp}(u)| \leq k\}$... pas convexes pour un sou

Objectifs :

- Conditions nécessaires et suffisantes d'atteignabilité
- Méthodes constructives

Contraintes coniques

Focus sur le cas où $P \subset U$ est un cône.

Motivation :

- contraintes de signe, $P = \{u \in U,\ u \geq 0\}$... convexes
- contraintes de parcimonie, $P = \{u \in U,\ |\mathrm{supp}(u)| \leq k\}$... pas convexes pour un sou

Objectifs :

- Conditions nécessaires et suffisantes d'atteignabilité
- Méthodes constructives

Différence fondamentale avec le cas borné (fermé faible) : atteignabilités exacte et approchée sont des notions distinctes, dès la dimension $\dim(X) \geq 2$.

État de l'art

Contraintes bornées,

- résultats de contrôlabilité plutôt que d'atteignabilité,
- à 0, et/ou en temps T non fixé (Brammer '72, Son '88, etc)

État de l'art

Contraintes bornées,

- ◇ résultats de contrôlabilité plutôt que d'atteignabilité,
- ◇ à 0, et/ou en temps T non fixé (Brammer '72, Son '88, etc)

Contraintes (coniques) non bornées,

- ◇ HUM method (Lions '88), sans contraintes
- ◇ parcimonie en dimension finie, $k = 1$ (Zuazua '10)
- ◇ contraintes isotropiques (Berrahmoune '14)
- ◇ contraintes linéaires (Ervedoza '20)
- ◇ contraintes de parcimonie "formes" pour équations paraboliques (PTZ '24)

État de l'art

Contraintes bornées,

- résultats de contrôlabilité plutôt que d'atteignabilité,
- à 0, et/ou en temps T non fixé (Brammer '72, Son '88, etc)

Contraintes (coniques) non bornées,

- HUM method (Lions '88), sans contraintes
- parcimonie en dimension finie, $k = 1$ (Zuazua '10)
- contraintes isotropiques (Berrahmoune '14)
- contraintes linéaires (Ervedoza '20)
- contraintes de parcimonie "formes" pour équations paraboliques (PTZ '24)

Méthodes constructives, s'appuient sur une fonctionnelle duale appropriée ; en prime donnent une condition suffisante d'atteignabilité.

But : développer une recette générale, cf la prépublication *Constructive reachability for linear control problems under conic constraints* (PTZ '24)
Focus sur l'atteignabilité approchée.

H Hilbert, $x \in H$

Pour $f : H \to]-\infty, +\infty]$,

- sous-différentielle

$$\partial f(x) := \{p \in H,\ \forall y \in H,\ f(y) \geq f(x) + \langle p, y - x\rangle\},$$

- conjuguée de Fenchel

$$f^\star(x) := \sup_{y \in H} \big(\langle x, y\rangle - f(y)\big).$$

Conjuguée de Fenchel, jauge et fonction support

H Hilbert, $x \in H$

Pour $f : H \to]-\infty, +\infty]$,

- ◇ sous-différentielle

$$\partial f(x) := \{p \in H,\ \forall y \in H,\ f(y) \geq f(x) + \langle p, y - x \rangle\},$$

- ◇ conjuguée de Fenchel

$$f^\star(x) := \sup_{y \in H} \big(\langle x, y \rangle - f(y)\big).$$

Pour C fermé convexe,

- ◇ fonction indicatrice δ_C définie par $\delta_C(x) = 0$ si $x \in C$, $+\infty$ sinon,
- ◇ fonction d'appui (ou support) $\sigma_C := \delta_C^*$, i.e. par définition

$$\sigma_C(x) = \sup_{y \in C} \langle x, y \rangle,$$

- ◇ jauge de C, c'est-à-dire

$$j_C(x) := \inf\{\alpha > 0,\ x \in \alpha C\}.$$

Cas convexe fermé : fonctionnelle primale

Contraintes : définies par P_r cône convexe fermé (contenant 0).

On choisit $\mathcal{U}_r$ convexe fermé borné, générateur de P_r (i.e., tel que $\mathrm{cone}(\mathcal{U}_r) = P_r$).
Typiquement $\mathcal{U}_r = P_r \cap \overline{B}(0, 1)$.

Contraintes : définies par P_r cône convexe fermé (contenant 0).

On choisit $\mathcal{U}_r$ convexe fermé borné, générateur de P_r (i.e., tel que $\mathrm{cone}(\mathcal{U}_r) = P_r$).
Typiquement $\mathcal{U}_r = P_r \cap \overline{B}(0,1)$.

$$\text{On pose} \quad F(u) := \frac{1}{2}\int_0^T j_{\mathcal{U}_r}^2(u(t))\, dt.$$

Coût impose les contraintes : $F(u) < +\infty \implies u \in L^2(0,T;P_r)$

Cas convexe fermé : fonctionnelle primale

Contraintes : définies par P_r cône convexe fermé (contenant 0).

On choisit $\mathcal{U}_r$ convexe fermé borné, générateur de P_r (i.e., tel que $\mathrm{cone}(\mathcal{U}_r) = P_r$). Typiquement $\mathcal{U}_r = P_r \cap \overline{B}(0,1)$.

$$\text{On pose} \quad F(u) := \frac{1}{2}\int_0^T j^2_{\mathcal{U}_r}(u(t))\,dt.$$

Coût impose les contraintes : $F(u) < +\infty \implies u \in L^2(0,T;P_r)$

Il existe $u_\varepsilon \in L^2(0,T;P_r)$ tel que that $\|y(T) - y_f\|_X \leq \varepsilon$ dès que

$$\pi_\varepsilon = \inf_{u\in E,\ \|y(T)-y_f\|_X\leq\varepsilon} F(u) < +\infty.$$

Réécriture dite *de filou*

$$\begin{aligned}\pi_\varepsilon &= \inf_{u\in E,\ \|y(T)-y_f\|_X\leq\varepsilon} F(u)\\ &= \inf_{u\in E} F(u) + G(L_T u)\end{aligned}$$

avec $G = \delta_{\overline{B}(y_f - S_T y_{\mathbf{0}},\varepsilon)}$.

Cas convexe fermé : fonctionnelle duale

Théorème de Fenchel-Rockafellar :

$$\begin{aligned}\pi_\varepsilon &= -\inf_{p_f \in X} F^*(L_T^* p_f) + G^*(-p_f) \\ &= -\inf_{p_f \in X} \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_{\mathcal{U}_r}^2(L_T^* p_f(t))\, dt - \langle y_f - S_T y_0, p_f \rangle + \varepsilon \|p_f\|_X}_{J_\varepsilon(p_f)}\end{aligned}$$

J_ε prend des valeurs finies sur X.

Cas convexe fermé : fonctionnelle duale

Théorème de Fenchel-Rockafellar :

$$\begin{aligned}\pi_\varepsilon &= -\inf_{p_f \in X} F^*(L_T^* p_f) + G^*(-p_f) \\ &= -\inf_{p_f \in X} \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2_{\mathcal{U}_r}(L_T^* p_f(t))\,dt - \langle y_f - S_T y_0, p_f\rangle + \varepsilon \|p_f\|_X}_{J_\varepsilon(p_f)}\end{aligned}$$

J_ε prend des valeurs finies sur X.

Qui plus est,

- π_ε est atteint s'il est fini,
- Conditions d'optimalité : si $u^\star$ est primal optimal, $p_f^\star$ dual optimal, alors

$$u^\star \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star) \quad \text{et} \quad p_f^\star \in -\partial G(L_T u^\star)$$

Note : généralise HUM, i.e., si $P_r = U$, avec $\mathcal{U}_r = \overline{B}(0,1)$, $F = F^* = \frac{1}{2}\|\cdot\|_E^2$.

Fonctionnelles d'intérêt : pour $\varepsilon > 0$,

$$J_\varepsilon(p_f) = \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2_{\mathcal{U}_r}(L_T^* p_f(t))\,dt - \langle y_f - S_T y_0, p_f\rangle + \varepsilon\|p_f\|_X.$$

Théorème (P.-Trélat-Zhang)

y_f est approximativement P_r-atteignable depuis y_0 en temps $T > 0$ si et seulement si

$$\forall p_f \in X, \quad F^*(L_T^* p_f) = 0 \implies \langle y_f - S_T y_0, p_f\rangle_X \leq 0 \qquad (C_a)$$

Sous l'hypothèse (C_a), pour tout $\varepsilon > 0$, J_ε admet un unique minimiseur $p_f^\star$, et il existe au moins un contrôle $u_\varepsilon \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star)$ qui soit dans $L^2(0, T; P_r)$ et envoie y_0 sur $\overline{B}(y_f, \varepsilon)$ au temps T.

Cas convexe fermé - atteignabilité approchée

Fonctionnelles d'intérêt : pour $\varepsilon > 0$,

$$J_\varepsilon(p_f) = \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2_{\mathcal{U}_r}(L_T^* p_f(t))\, dt - \langle y_f - S_T y_0, p_f\rangle + \varepsilon \|p_f\|_X.$$

Théorème (P.-Trélat-Zhang)

y_f est approximativement P_r-atteignable depuis y_0 en temps $T > 0$ si et seulement si

$$\forall p_f \in X, \quad F^*(L_T^* p_f) = 0 \implies \langle y_f - S_T y_0, p_f\rangle_X \leq 0 \qquad (\mathrm{C_a})$$

Sous l'hypothèse (C_a), pour tout $\varepsilon > 0$, J_ε admet un unique minimiseur $p_f^\star$, et il existe au moins un contrôle $u_\varepsilon \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star)$ qui soit dans $L^2(0, T; P_r)$ et envoie y_0 sur $\overline{B}(y_f, \varepsilon)$ au temps T.

Remarques :

- Suffisance de $(\mathrm{C_a})$: coercivité de J_ε
- Nécessité de $(\mathrm{C_a})$: argument indépendant.

Autour de la condition $u \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star)$

$u \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star)$: condition nécessaire d'optimalité... devient suffisante si l'ensemble est réduit à un singleton.

$$u \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star) \iff \text{pour p.t. } t \in (0,T),\ u(t) \in \sigma_{\mathcal{U}_r}(L_T^* p_f^\star(t)) \operatorname*{arg\,max}_{v \in \mathcal{U}_r} \langle L_T^* p_f^\star(t), v \rangle_U .$$

Autour de la condition $u \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star)$

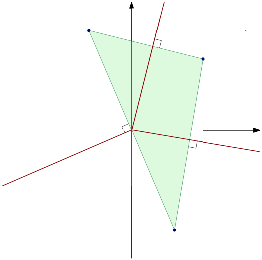
$u \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star)$: condition nécessaire d'optimalité... devient suffisante si l'ensemble est réduit à un singleton.

$$u \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star) \iff \text{pour p.t. } t \in (0,T),\ u(t) \in \sigma_{\mathcal{U}_r}(L_T^* p_f^\star(t)) \operatorname*{arg\,max}_{v \in \mathcal{U}_r} \langle L_T^* p_f^\star(t), v \rangle_U.$$

Unicité vérifiée dès que

$$L_T^* p_f^\star(t) \notin \mathrm{sing}(\mathcal{U}_r) \ \text{ pour presque tout } t \in (0,T),$$

où $\mathrm{sing}(\mathcal{U}_r) := \{q \in U,\ \operatorname{arg\,max}_{v \in \mathcal{U}_r} \langle q, v \rangle_U \text{ n'est pas un singleton}\}$



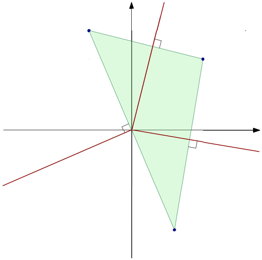
$u \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star)$: condition nécessaire d'optimalité... devient suffisante si l'ensemble est réduit à un singleton.

$u \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star) \iff$ pour p.t. $t \in (0,T)$, $u(t) \in \sigma_{\mathcal{U}_r}(L_T^* p_f^\star(t)) \underset{v \in \mathcal{U}_r}{\arg\max}\, \langle L_T^* p_f^\star(t), v\rangle_U$.

Unicité vérifiée dès que

$$L_T^* p_f^\star(t) \notin \mathrm{sing}(\mathcal{U}_r) \text{ pour presque tout } t \in (0,T),$$

où $\mathrm{sing}(\mathcal{U}_r) := \{q \in U,\ \arg\max_{v \in \mathcal{U}_r} \langle q, v\rangle_U \text{ n'est pas un singleton}\}$



Condition générale indépendante de y_0, y_f, T :

$$\forall p_f \neq 0, \quad B^* S_t^* p_f \notin \mathrm{sing}(\mathcal{U}_r) \text{ pour presque tout } t > 0, \tag{H}$$

Cas convexe fermé - atteignabilité approchée (bis)

Fonctionnelles d'intérêt : pour $\varepsilon > 0$

$$J_\varepsilon(p_f) = \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2_{\mathcal{U}_r}(L_T^* p_f(t))\,dt - \langle y_f - S_T y_0, p_f\rangle + \varepsilon\|p_f\|_X.$$

Condition pertinente :

$$B^* S_t^* p_f^\star(t) \notin \operatorname{sing}(\mathcal{U}_r) \text{ pour presque tout } t > 0. \tag{H}$$

Théorème (P.-Trélat-Zhang)

y_f est approximativement P_r-atteignable depuis y_0 en temps $T > 0$ ssi

$$\forall p_f \in X, \quad F^*(L_T^* p_f) = 0 \implies \langle y_f - S_T y_0, p_f\rangle_X \leq 0 \tag{$\mathrm{C_a}$}$$

Sous l'hypothèse (C_a), pour tout $\varepsilon > 0$, J_ε admet un unique minimiseur $p_f^\star$, et si (H) est vérifiée, alors l'unique $u_\varepsilon^\star \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star)$ est dans $L^2(0, T; P_r)$ et envoie y_0 sur $\overline{B}(y_f, \varepsilon)$ au temps T.

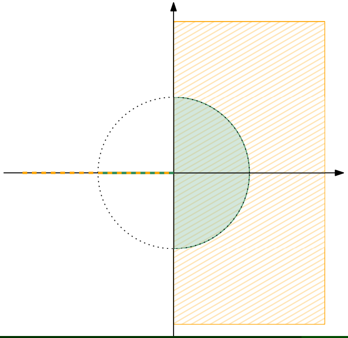
Cas général

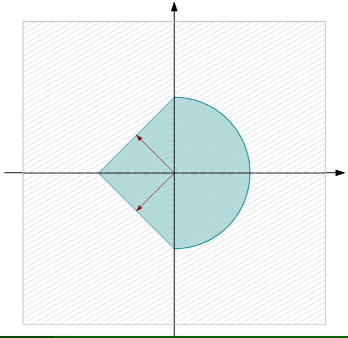
Contraintes : définies par P cône (contenant 0).

(i) On choisit $\mathcal{U}$ (borné) générateur de P, i.e, $P = \mathrm{cone}(\mathcal{U})$.

(ii) On applique ce qui précède à $\mathcal{U}_r := \overline{\mathrm{conv}}(\mathcal{U})$, de cône associé $P_r := \mathrm{cone}(\mathcal{U}_r)$.

$$\begin{tikzcd}
P & P_r \\
\mathcal{U} \arrow[u, "\mathrm{cone}"] \arrow[r, "\overline{\mathrm{conv}}"] & \mathcal{U}_r \arrow[u, "\mathrm{cone}"']
\end{tikzcd}$$





Cas général - atteignabilité approchée

Fonctionnelles d'intérêt : pour $\varepsilon > 0$

$$J_\varepsilon(p_f) = \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2_{\mathcal{U}_r}(L_T^* p_f(t))\,dt - \langle y_f - S_T y_0, p_f\rangle + \varepsilon\|p_f\|_X.$$

Conditions pertinentes :

$$\forall p_f \neq 0, \quad B^* S_t^* p_f \notin \mathrm{sing}(\mathcal{U}_r) \text{ pour p.t. } t > 0, \tag{H}$$

$$\mathrm{ext}(\mathcal{U}_r) = \mathrm{ext}(\overline{\mathrm{conv}}(\mathcal{U})) \subset \mathcal{U}. \tag{E}$$

Théorème (P.-Trélat-Zhang)

On suppose que y_f est approximativement P_r-atteignable depuis y_0 en temps $T > 0$ (C_a)

Alors J_ε admet un unique minimiseur $p_f^\star$ pour tout $\varepsilon > 0$ et si de plus (H) et (E) vérifiées, alors l'unique $u_\varepsilon^\star \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star)$ est dans $L^2(0, T; P)$ et envoie y_0 sur $\overline{B}(y_f, \varepsilon)$ au temps T.

En particulier, si les conditions (H) et (E) sont vérifiées, alors y_f est approximativement P-atteignable depuis y_0 en temps $T > 0$.

Contexte : $B = \mathrm{Id}$, $X = U = L^2(\Omega)$.
Exemple typique : chaleur Dirichlet, Ω régulier, $A = \Delta$, $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.

Contraintes : pour $0 < m_L \leq |\Omega|$, contrôles $u \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ tels que

$$\text{pour p.t. } t \in (0, T)\ u(t) = M(t)\,\chi_{\omega(t)} \text{ où } M(t) > 0 \text{ et } |\omega(t)| \leq m_L.$$

Contraintes coniques non convexes P d'ensemble générateur naturel :

$$\mathcal{U} := \{\chi_\omega,\ |\omega| \leq m_L\},$$

Contexte : $B = \mathrm{Id}$, $X = U = L^2(\Omega)$.
Exemple typique : chaleur Dirichlet, Ω régulier, $A = \Delta$, $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.

Contraintes : pour $0 < m_L \leq |\Omega|$, contrôles $u \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ tels que

$$\text{pour p.t. } t \in (0, T)\ u(t) = M(t)\,\chi_{\omega(t)} \text{ où } M(t) > 0 \text{ et } |\omega(t)| \leq m_L.$$

Contraintes coniques non convexes P d'ensemble générateur naturel :

$$\mathcal{U} := \{\chi_\omega,\ |\omega| \leq m_L\},$$

Relaxation :

$$\mathcal{U}_r = \overline{\mathrm{conv}}(\mathcal{U}) = \left\{ u \in L^2(\Omega),\ 0 \leq u \leq 1 \text{ and } \int_\Omega u \leq m_L \right\}.$$

$P_r = \mathrm{cone}(\mathcal{U}_r) = \{u \in L^\infty(\Omega),\ u \geq 0\}$, pas fermé.

Lemme : (E) est vérifiée car $\mathrm{ext}(\mathcal{U}_r) = \mathcal{U}$.

Contrôle approché par des formes : cône relaxé

On fixe y_0, y_f, T tels que $y_f \geq S_T y_0$.

Atteignabilité approchée dans le cône $P_r = \mathrm{cone}(\mathcal{U}_r) = \{u \in L^\infty(\Omega),\ u \geq 0\}$: cf condition

$$\forall p_f \in X, \quad F^*(L_T^* p_f) = 0 \implies \langle y_f - S_T y_0, p_f \rangle_{L^2(\Omega)} \leq 0 \qquad (\mathrm{C_a})$$

On fixe y_0, y_f, T tels que $y_f \geq S_T y_0$.

Atteignabilité approchée dans le cône $P_r = \mathrm{cone}(\mathcal{U}_r) = \{u \in L^\infty(\Omega),\ u \geq 0\}$: cf condition

$$\forall p_f \in X, \quad F^*(L_T^* p_f) = 0 \implies \langle y_f - S_T y_0, p_f \rangle_{L^2(\Omega)} \leq 0 \tag{C$_a$}$$

Si $F(L_T^* p_f) = 0$, alors $\sigma_{\mathcal{U}_r}(L_T^* p_f(t)) = 0$ pour p.t. $t \in (0, T)$. Or

$$\sigma_{\mathcal{U}_r}(q) = \sup_{v \in \mathcal{U}_r} \int_\Omega q(x) v(x)\, dx = 0 \implies q \leq 0 \text{ sur } \Omega.$$

Ainsi $L_T^* p_f(t) = S_{T-t}^* p_f \leq 0$ pour p.t. $t \in (0, T)$ d'où $p_f \leq 0$. Et donc

$$\langle y_f - S_T y_0, p_f \rangle_{L^2(\Omega)} \leq 0.$$

$$\mathcal{U}_r = \overline{\mathrm{conv}}(\mathcal{U}) = \left\{ u \in L^2(\Omega),\ 0 \leq u \leq 1 \text{ and } \int_\Omega u \leq m_L \right\}.$$

Jauge de $\mathcal{U}_r$:

$$\forall u \in L^2(\Omega), \quad j_{\mathcal{U}_r}(u) = \max\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \frac{\|u\|_{L^1(\Omega)}}{m_L} \right) + \delta_{\{u \geq 0\}}.$$

$$\mathcal{U}_r = \overline{\mathrm{conv}}(\mathcal{U}) = \left\{ u \in L^2(\Omega),\ 0 \leq u \leq 1 \text{ and } \int_\Omega u \leq m_L \right\}.$$

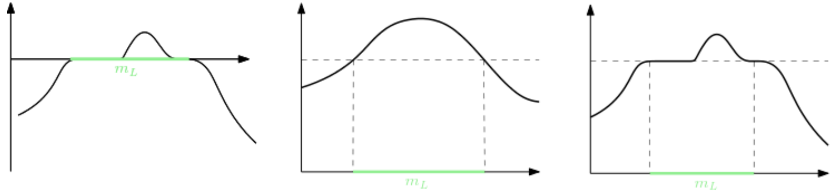
Jauge de $\mathcal{U}_r$:

$$\forall u \in L^2(\Omega), \quad j_{\mathcal{U}_r}(u) = \max\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \frac{\|u\|_{L^1(\Omega)}}{m_L} \right) + \delta_{\{u \geq 0\}}.$$

Lemme de la baignoire : étude du problème d'optimisation

$$\sigma_{\mathcal{U}_r}(q) = \sup_{v \in \mathcal{U}_r} \langle q, v \rangle_U = \sup_{v \in \mathcal{U}_r} \int_\Omega q(x) v(x)\, dx.$$

Si tous les ensembles de niveau de q sont de mesure nulle, alors il existe un unique maximiseur, i.e., $q \notin \mathrm{sing}(\mathcal{U}_r)$



Théorème

Soient y_0, y_f, T tels que $y_f \geq S_T y_0$. Si le semi-groupe adjoint satisfait la propriété

$$\forall p_f \neq 0, \text{ les ensembles de niveau de } S_t^* p_f \text{ sont de mesure nulle } 0 \text{ pour p.t. } t > 0,$$

alors y_f est approximativement P-atteignable depuis y_0 au temps T.

Contrôle approché par des formes : cône originel

Théorème

Soient y_0, y_f, T tels que $y_f \geq S_T y_0$. Si le semi-groupe adjoint satisfait la propriété

$$\forall p_f \neq 0, \text{ les ensembles de niveau de } S_t^* p_f \text{ sont de mesure nulle } 0 \text{ pour p.t. } t > 0,$$

alors y_f est approximativement P-atteignable depuis y_0 au temps T.

- Constructif : formule pour l'unique contrôle optimal à partir de l'unique variable duale optimale
- Couvre le cas de la chaleur Dirichlet, et plus généralement des opérateurs analytiques-hypoelliptiques (+ une propriété générique)
- Résultat de contrôlabilité positive, "optimal" (pour la chaleur, disons) au sens où
  - $u \geq 0 \implies y(T) \geq S_T y_0$, par principe de comparaison parabolique
  - si la zone du contrôle est restreinte, obstructions en temps petit
- Atteignabilité exacte : problème ouvert.

Ralph Rockafellar. "Duality and stability in extremum problems involving convex functions". In: *Pacific Journal of Mathematics* 21.1 (1967), pp. 167–187.

Jacques-Louis Lions. "Remarks on approximate controllability". In: *Journal d'Analyse Mathématique* 59.1 (1992), p. 103.

Enrique Zuazua. "Switching control". In: *Journal of the European Mathematical Society* 13.1 (2010), pp. 85–117.

Larbi Berrahmoune. "A variational approach to constrained controllability for distributed systems". In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 416.2 (2014), pp. 805–823.

Camille Pouchol, Emmanuel Trélat, and Christophe Zhang. "Approximate control of parabolic equations with on-off shape controls by Fenchel duality". In: *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire* (2024).

Camille Pouchol, Emmanuel Trélat, and Christophe Zhang. "Constructive reachability for linear control problems under conic constraints". In: *arXiv preprint arXiv:2405.07684* (2024).

Bien fondé de la relaxation

Fonctionnelle J_ε, associée à $\mathcal{U}_r$: donne $u^\star \in L^2(0,T;P_r)$, a-t-on $u^\star \in L^2(0,T;P)$?

Si $p_f^\star$ minimise J_ε, alors tout contrôle optimal satisfait $u^\star \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star)$, i.e.,

$$u^\star \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star) \iff \text{pour p.t. } t \in (0,T),\ u^\star(t) \in \sigma_{\mathcal{U}_r}(L_T^* p_f^\star(t)) \operatorname*{arg\,max}_{v \in \mathcal{U}_r} \langle L_T^* p_f^\star(t), v\rangle_U.$$

Fonctionnelle J_ε, associée à $\mathcal{U}_r$: donne $u^\star \in L^2(0,T;P_r)$, a-t-on $u^\star \in L^2(0,T;P)$?

Si $p_f^\star$ minimise J_ε, alors tout contrôle optimal satisfait $u^\star \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star)$, i.e.,

$$u^\star \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star) \iff \text{pour p.t. } t \in (0,T),\ u^\star(t) \in \sigma_{\mathcal{U}_r}(L_T^* p_f^\star(t)) \operatorname*{arg\,max}_{v \in \mathcal{U}_r} \langle L_T^* p_f^\star(t), v \rangle_U.$$

Unicité assurée par

$$\forall p_f \neq 0, \quad B^* S_t^* p_f \notin \mathrm{sing}(\mathcal{U}_r) \ \text{ pour presque tout } t > 0 \tag{H}$$

Si (H) est vérifiée, unique tel contrôle $u^\star$, qui doit être extrémal :

$$\frac{u^\star(t)}{\sigma_{\mathcal{U}_r}(L_T^* p_f^\star(t))} \in \mathrm{ext}(\mathcal{U}_r).$$

Fonctionnelle J_ε, associée à $\mathcal{U}_r$: donne $u^\star \in L^2(0,T;P_r)$, a-t-on $u^\star \in L^2(0,T;P)$?

Si $p_f^\star$ minimise J_ε, alors tout contrôle optimal satisfait $u^\star \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star)$, i.e.,

$$u^\star \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star) \iff \text{pour p.t. } t \in (0,T),\ u^\star(t) \in \sigma_{\mathcal{U}_r}(L_T^* p_f^\star(t)) \operatorname*{arg\,max}_{v \in \mathcal{U}_r} \langle L_T^* p_f^\star(t), v \rangle_U .$$

Unicité assurée par

$$\forall p_f \neq 0, \quad B^* S_t^* p_f \notin \mathrm{sing}(\mathcal{U}_r) \text{ pour presque tout } t > 0 \tag{H}$$

Si (H) est vérifiée, unique tel contrôle $u^\star$, qui doit être extrémal :

$$\frac{u^\star(t)}{\sigma_{\mathcal{U}_r}(L_T^* p_f^\star(t))} \in \mathrm{ext}(\mathcal{U}_r).$$

Et donc le quotient est dans $\mathcal{U}$ de manière générique, car dès que

$$\mathrm{ext}(\mathcal{U}_r) = \mathrm{ext}(\overline{\mathrm{conv}}(\mathcal{U})) \subset \mathcal{U} \tag{E}$$

Théorème de Milman : (E) est vérifiée sous l'une des deux hypothèses

- $\mathcal{U}$ est fermé faible,
- $\mathcal{U}_r$ est compact (fort) et $\mathcal{U}$ est fermé (fort).

Cas convexe fermé - atteignabilité exacte

Fonctionnelle d'intérêt :

$$J_0(p_f) = \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2_{\mathcal{U}_r}(L_T^* p_f(t))\,dt - \langle y_f - S_T y_0, p_f\rangle.$$

Théorème (P.-Trélat-Zhang)

y_f est exactement P_r-atteignable depuis y_0 en temps $T > 0$ (... via des contrôles de coût F fini) ssi

$$\exists c > 0,\ \forall p_f \in X, \quad \langle y_f - S_T y_0, p_f\rangle_X \leq c\, F^*(L_T^* p_f)^{1/2}$$

Sous l'hypothèse (C_e), J_0 admet un minimiseur $p_f^\star$ si et seulement si "c est atteint", et dans ce cas pour chaque tel minimiseur il existe au moins un contrôle $u \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star)$ qui soit dans $L^2(0, T; P_r)$ et envoie y_0 sur y_f au temps T.

Cas convexe fermé - atteignabilité exacte

Fonctionnelle d'intérêt :

$$J_0(p_f) = \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2_{\mathcal{U}_r}(L_T^* p_f(t))\,dt - \langle y_f - S_T y_0, p_f\rangle.$$

Théorème (P.-Trélat-Zhang)

y_f est exactement P_r-atteignable depuis y_0 en temps $T > 0$ (... via des contrôles de coût F fini) ssi

$$\exists c > 0,\ \forall p_f \in X, \quad \langle y_f - S_T y_0, p_f\rangle_X \le c\, F^*(L_T^* p_f)^{1/2} \qquad (\mathrm{C_e})$$

Sous l'hypothèse ($\mathrm{C_e}$), J_0 admet un minimiseur $p_f^\star$ si et seulement si "c est atteint", et dans ce cas pour chaque tel minimiseur il existe au moins un contrôle $u \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star)$ qui soit dans $L^2(0, T; P_r)$ et envoie y_0 sur y_f au temps T.

Remarques :

- Suffisance de ($\mathrm{C_e}$) : assure que J_0 est minorée par une fonction coercive : $\inf J_0$ est bien défini (mais peut ne pas être atteint)
- $\inf J_0$ est atteint si et seulement si c est atteint
- Nécessité de ($\mathrm{C_e}$) : argument indépendant.

Fonctionnelle d'intérêt :

$$J_0(p_f) = \frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2_{\mathcal{U}_r}(L_T^* p_f(t))\, dt - \langle y_f - S_T y_0, p_f \rangle.$$

Conditions pertinentes :

$$\forall p_f \neq 0, \quad B^* S_t^* p_f \notin \mathrm{sing}(\mathcal{U}_r) \text{ pour p.t. } t > 0, \tag{H}$$

$$\mathrm{ext}(\mathcal{U}_r) = \mathrm{ext}(\overline{\mathrm{conv}}(\mathcal{U})) \subset \mathcal{U}. \tag{E}$$

Théorème (P.-Trélat-Zhang)

On suppose que y_f est exactement P_r-atteignable depuis y_0 en temps $T > 0$ (... via des contrôles de coût F fini). (C_e)

Alors J_0 admet un minimiseur $p_f^\star$ si et seulement si "c est atteint", et dans ce cas pour chaque tel minimiseur, si (H) et (E) sont vérifiées, alors l'unique $u^\star \in \partial F^*(L_T^* p_f^\star)$ est dans $L^2(0, T; P)$ et envoie y_0 sur y_f au temps T.

En particulier, si les conditions (H) et (E) sont vérifiées, alors y_f est exactement P-atteignable depuis y_0 en temps $T > 0$.

Parcimonie en dimension finie : problème et relaxation

Contexte : $X = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$, A et B matrices

Contrôles k-parcimonieux

$$\text{pour p.t. } t \in (0,T), \quad \|u(t)\|_0 \leq k$$

$$P^{(k)} := \{u \in \mathbb{R}^m,\ \|u\|_0 \leq k\}, \quad \text{fermé, pas convexe (dès que } k \leq m-1).$$

Générateur :

$$\mathcal{U}^{(k)} := P^{(k)} \cap \overline{B}_\infty(0,1) = \{u \in \mathbb{R}^m,\ \|u\|_0 \leq k,\ \|u\|_\infty \leq 1\}.$$

Contexte : $X = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$, A et B matrices

Contrôles k-parcimonieux

$$\text{pour p.t. } t \in (0, T), \quad \|u(t)\|_0 \leq k$$

$$P^{(k)} := \{u \in \mathbb{R}^m,\ \|u\|_0 \leq k\}, \quad \text{fermé, pas convexe (dès que } k \leq m-1).$$

Générateur :

$$\mathcal{U}^{(k)} := P^{(k)} \cap \overline{B}_\infty(0,1) = \{u \in \mathbb{R}^m,\ \|u\|_0 \leq k,\ \|u\|_\infty \leq 1\}.$$

Relaxation :

$$\mathcal{U}_r^{(k)} = \overline{\mathrm{conv}}(\mathcal{U}^{(k)}) = \{u \in \mathbb{R}^m,\ \|u\|_1 \leq 1,\ \|u\|_\infty \leq k\},$$

Remarques :

- $P_r = \mathbb{R}^m$ tout entier, i.e., le problème relaxé est non contraint,
- $\mathcal{U}^{(k)}$ est fermé donc le théorème de Milman s'applique (hypothèse (E))

$$\mathcal{U}_r^{(k)} = \overline{\mathrm{conv}}(\mathcal{U}^{(k)}) = \{u \in \mathbb{R}^m,\ \|u\|_1 \leq 1,\ \|u\|_\infty \leq k\},$$

Calcul des jauge et fonction support

$$\forall u \in \mathbb{R}^m, \quad j_{\mathcal{U}_r^{(k)}}(u) = \max\left(\frac{\|u\|_1}{k}, \|u\|_\infty\right), \qquad \sigma_{\mathcal{U}_r^{(k)}}(u) = \sum_{i=1}^{k} |u_{(i)}|,$$

où pour $u \in \mathbb{R}^m$, $|u_{(1)}| \geq |u_{(2)}| \geq \ldots \geq |u_{(m)}|$.

$$\mathcal{U}_r^{(k)} = \overline{\mathrm{conv}}(\mathcal{U}^{(k)}) = \{u \in \mathbb{R}^m,\ \|u\|_1 \leq 1,\ \|u\|_\infty \leq k\},$$

Calcul des jauge et fonction support

$$\forall u \in \mathbb{R}^m, \quad j_{\mathcal{U}_r^{(k)}}(u) = \max\left(\frac{\|u\|_1}{k}, \|u\|_\infty\right), \qquad \sigma_{\mathcal{U}_r^{(k)}}(u) = \sum_{i=1}^{k} |u_{(i)}|,$$

où pour $u \in \mathbb{R}^m$, $|u_{(1)}| \geq |u_{(2)}| \geq \ldots \geq |u_{(m)}|$.

Coût associé

$$\forall u \in E, \quad F(u) = \tfrac{1}{2} \int_0^T j^2_{\mathcal{U}_r^{(k)}}(u(t))\, dt.$$

Pour $p_f \in \mathbb{R}^n$, notant $p(t) = S^*_{T-t} p_f$, la fonctionnelle à minimiser vaut

$$\begin{aligned} J_0(p_f) &= \tfrac{1}{2} \int_0^T \sigma^2_{\mathcal{U}_r^{(k)}}(L_T^* p_f(t))\, dt - \langle y_f - S_T y_0, p_f \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \tfrac{1}{2} \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{k} |(B^* p(t))_{(i)}| \right)^2 dt - \langle y_f - S_T y_0, p_f \rangle_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

On montre que

$$\mathrm{sing}(\mathcal{U}_r^{(k)}) = \{u \in \mathbb{R}^m,\ \ |u_{(k)}| = |u_{(k+1)}|\}.$$

$$\forall p_f \neq 0, \quad \{t > 0,\ |(B^* S_t^* p_f)_{(k)}| = |(B^* S_t^* p_f)_{(k+1)}|\} \text{ est de mesure nulle,} \qquad \text{(H)}$$

Proposition

On suppose que (A, B) est contrôlable.

Si de plus (H) est vérifiée, alors pour tous y_0, y_f, T, y_f est exactement atteignable depuis y_0 en temps T par des contrôles k-parcimonieux.

- *Preuve* : Via l'inégalité d'observabilité, on montre que c est atteint pour tout y_0, y_f, T.
- Constructif : formules pour les contrôles en fonction des minimiseurs de J_0.
- Question ouverte : expliciter (H) ? (Conditions suffisantes disponibles, mais très fortes)