Homogénéisation pour des fluides compressibles avec températures

Pierre GONIN--JOUBERT, ICJ - Lyon

Le principe de l'homogénéisation pour Navier-Stokes est le suivant : partant d'un système initial (appelé mélange *mésoscopique*) où deux fluides newtoniens notés $+$ et $-$ non miscibles cohabitent dans des ouverts $\Omega_+(t)$ et $\Omega_-(t)$, partitionnant l'espace, et donc les composantes connexes sont de taille de l'ordre de ε, on procède à un changement d'échelle (en faisant tendre $\varepsilon \to 0$) afin d'obtenir un mélange *macroscopique*, où l'on ne considère plus deux fluides mais bien un seul, homogénéisé.
Dans le cas barotrope c'est à dire avec loi de pression ne dépendant que de la densité, cette stratégie permet d'obtenir le système d'EDPs dit de Baer-Nunziato ([1]), qui ressemblent aux équations de Navier-Stokes mais comportent en plus des termes de relaxation (que l'on peut lier aux lois de contraintes). Ainsi, si on se place en dimension 1, notant u la vitesse du fluide et $\alpha_\pm$, $\sigma_\pm$ et $\mu_\pm$ la fraction volumique, la contrainte de Cauchy et la viscosité du fluide $\pm$, l'équation sur $\alpha_\pm$ est

$$\partial_t \alpha_\pm + u \partial_x \alpha_\pm = \frac{\alpha_+ \alpha_-}{\alpha_+ \mu_- + \alpha_- \mu_+}(\sigma_\mp - \sigma_\pm) \qquad \text{avec } \alpha_+ + \alpha_- = 1 \text{ et } \alpha_\pm \in [0,1].$$

La difficulté du passage à la limite $\varepsilon \to 0$ s'explique par le caractère oscillant de plusieurs quantités du système (typiquement la viscosité mésoscopique si $\mu_+ \neq \mu_-$). Des premiers résultats d'homogénéisation dans le cas barotrope menant aux modèles de Baer-Nunziato ont été obtenus par M. Hillairet ([5]) dans un cadre des solutions faibles à la Leray qui ne permet pas d'avoir une justification complète, contraignant à développer une partie de manière formelle. Ils ont été améliorés par D. Bresch et X. Huang en considérant des solutions "à la Hoff" (*i.e.* à régularité intermédiaire), sous l'hypothèse que les deux fluides se déplacent à la même vitesse ([4]). Dans [2] et [3], D. Bresch, C. Burtea et F. Lagoutière parviennent à justifier le processus d'homogénéisation en introduisant en plus une équation sur la "fonction couleur" $c = 1_{\Omega_+}$ et en évitant ainsi certaines hypothèses restrictives.
Ce poster présentera les travaux de mon début de thèse, en collaboration avec mes directeurs de thèse D. Bresch et F. Lagoutière, ainsi que de C. Burtea. Des résultats originaux de caractères bien posés et d'homogénéisation liés à un mélange de fluides non barotropes (dépendant de la température) seront énoncés. Un schéma numérique linéairement implicite sera également proposé pour approcher et relier les différents systèmes. Ces résultats sont importants pour une meilleure compréhension des modèles de mélanges compressibles et de l'approche numérique que l'on doit en faire. Notre travail prolonge de manière non triviale des travaux de A.A. Amosov et A.A. Zlotnik et plus récemment M. Hillairet.

[1] M. Baer, J. Nunziato. *A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (ddt) in reactive granular materials.* Int. J. Multiphase Flow, **12**, 1986.

[2] D. Bresch, C. Burtea, F. Lagoutière. *Mathematical justification of a compressible bifluid system with different pressure laws : A continuous approach.* Applicable Analysis, **101**, 4235–4266, 2022.

[3] D. Bresch, C. Burtea, F. Lagoutière. *Mathematical justification of a compressible bi-fluid system with different pressure laws : A semi-discrete approach and numerical illustrations.* J. Comp. Phys, **490**, 2023.

[4] D. Bresch, X. Huang. *A multi-fluid compressible system as the limit of weak solutions of the isentropic compressible navier–stokes equations.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, **201**, 647–680, 2011. doi :10.1007/s00205-011-0400-8.

[5] M. Hillairet. *Propagation of density-oscillations in solutions to the barotropic compressible navier–stokes system.* Journal of Mathematical Fluid Mechanics, **9**, 343–376, 2007.

Contact : `goninjoubert@math.univ-lyon1.fr`