Une approche moment pour des lois de conservation hyperboliques paramétrées

Clément CARDOEN, LMJL - Nantes **Swann MARX**, LS2N - Nantes
Anthony NOUY, LMJL - Nantes **Nicolas SEGUIN**, IMAG - Montpellier

Nous proposons ici une nouvelle méthode qui est une extension de [5] aux lois de conservation paramétrées ou aléatoires. Alors qu'il est classique de rechercher des solutions faibles aux lois de conservation hyperboliques, nous nous intéressons aux solutions dites à valeur mesure (mv) introduites par DiPerna dans [1], qui sont des mesures de Young $\nu_{(t,x,\xi)}$ indexées respectivement par le temps, l'espace et les paramètres. En pratique, une solution mv est une mesure de Dirac $\delta_{u(t,x,\xi)}$ supportée sur le graphe de la solution faible $u(t,x,\xi)$.
Le cadre que nous considérons est similaire à celui présenté dans [7, 6], mais notre point de départ est une formulation faible du problème vis-à-vis du paramètre. Sous l'hypothèse que les données sont polynomiales, cette formulation fournit des contraintes sur les moments de la mesure. Cela nous permet de considérer le problème comme un problème aux moments généralisé (GMP), un problème d'optimisation en dimension infinie sur des séquences de moments de mesures, où le coût et les contraintes sont linéaires en les moments des mesures. Des résultats puissants de la géométrie algébrique réelle permettent de reformuler la contrainte selon laquelle une suite est une suite de moments en contraintes semi-définies implémentables numériquement. Ce problème est ensuite résolu en utilisant la hiérarchie de Lasserre (moment sum-of-squares) [3], qui consiste à résoudre une séquence de programmes semi-définis convexes de taille croissante pour approcher les moments des solutions mv.
Une fois qu'une approximation des moments est obtenue, plusieurs post-traitements sont possibles. Tout d'abord, nous pouvons obtenir des statistiques sur les variables d'intérêt qui sont des fonctions des moments de la solution. De plus, le graphe de la solution $u(t,x,\xi)$ peut être récupéré en utilisant une propriété de localisation du noyau de Christoffel-Darboux de la mesure approchée $\nu_{(t,x,\xi)}$, en suivant la méthodologie proposée dans [4]. En suivant [2], on peut aussi avoir accès à des quantités d'intérêt plus générales.

[1] R. J. Diperna. *Measure-valued solutions to conservation laws.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, **88**, 223–270, 1985.

[2] D. Henrion, J. Lasserre. *Graph Recovery from Incomplete Moment Information.* Constructive Approximation, **56**, 165–187, 2022.

[3] J. B. Lasserre. *Moments, positive polynomials and their applications*, vol. 1. World Scientific, 2009.

[4] S. Marx, E. Pauwels, T. Weisser, D. Henrion, J. Lasserre. *Semi-algebraic approximation using Christoffel-Darboux kernel.* Constructive Approximation, 2021. doi :10.1007/s00365-021-09535-4.

[5] S. Marx, T. Weisser, D. Henrion, J. Lasserre. *A moment approach for entropy solutions to nonlinear hyperbolic PDEs.* Mathematical Control and Related Fields, **10(1)**, 113–140, 2020. doi : 10.3934/mcrf.2019032.

[6] S. Mishra, N. Risebro, C. Schwab, S. Tokareva. *Numerical solution of scalar conservation laws with random flux functions.* SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification, **4(1)**, 552–591, 2016. doi :10.1137/120896967.

[7] S. Mishra, C. Schwab. *Sparse tensor multi-level monte carlo finite volume methods for hyperbolic conservation laws with random initial data.* Mathematics of Computation, **81(280)**, 1979–2018, 2012.

Contact : `clement.cardoen@ec-nantes.fr`