Sur le contrôle des systèmes LTI avec commandes $(H^1)'$

Lucas DAVRON, Ceremade - Paris

On considère un système “Linear and time invariant” (LTI) dont la loi d'évolution se met sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) & = & x_0, \end{array} \right. \tag{1}$$

où $x(t)$ (resp. $u(t)$) est l'état du système (resp. la valeur du contrôle exercée sur le système) au temps t. Cette classe de système est pertinente car elle modélise un grand nombre de problèmes de contrôle pour des EDP linéaires. Par soucis de clarté on fera les hypothèses (non essentielles) suivantes :

- $x(t) \in X$, où l'espace d'état X est un Hilbert séparable,
- $u(t) \in U$, où l'espace des commandes U est un Hilbert séparable,
- l'opérateur de dynamique A est un opérateur non borné sur X, qui engendre un semi-groupe fortement continu sur X,
- l'opérateur de contrôle B est linéaire et continu de U dans X.

On se donne de plus un horizon temporel fini $0 < T < \infty$. Dans ces conditions, il est classique que pour toute donnée initiale $x_0 \in X$ et toute loi de commande $u(\cdot) \in L^1(0,T;U)$, on dispose d'une unique solution $x(\cdot) \in C([0,T];X)$ à (1). Un problème général de contrôlabilité est alors de contrôler exactement le système (1), c'est à dire de décider si

$$\forall x_0, x_T \in X, \quad \exists u(\cdot) \in L^1(0,T;U), \quad x(T) = x_T.$$

On considère ici la possibilité de prendre $u(\cdot) \in (H^1(0,T;U))^*$, ce qui est avantageux du point de vue de la théorie du contrôle puisque $(H^1(0,T;U))^*$ est un espace plus grand que $L^1(0,T;U)$. À notre connaissance, cet espace fonctionnel n'a été considéré en théorie du contrôle des EDP que pour des problèmes hyperboliques d'ordre 2 (en majorité des équations des ondes comme dans [1]), et rien n'est connu pour ces lois de commande dans le cas d'un système aussi général que (1).

Dans un premier temps on donnera sens à $x(\cdot)$ et $x(T)$ lorsque $u(\cdot) \in (H^1(0,T;U))^*$. Pour simplifier, on prendra systématiquement $x_0 = 0$ dans (1), ce qui n'est pas restrictif en vertu du principe de superposition. Sous ces conditions, l'application $u(\cdot) \mapsto (x(\cdot), x(T))$ admet un unique prolongement linéaire et continu de $(H^1(0,T;U))^*$ vers $L^2(0,T;D(A^*)^*) \times X$. Pour $u(\cdot) \in (H^1(0,T;U))^*$ on notera encore $x(\cdot)$ et $x(T)$ les objets étendus. Bien que commode, cette notation induit quelques subtilités. D'une part, la fonction $x(\cdot)$ peut ne pas posséder la régularité suffisante afin de disposer d'une valeur bien définie en $t = T$. Il est en effet possible en toute généralité, en supposant $B \neq 0$, de construire des lois de commandes $u(\cdot)$ telles que $x(\cdot)$ n'est essentiellement bornée sur aucun sous-intervalle non trivial de $[0,T]$. D'autre part, même si $x(\cdot)$ est une fonction lisse, sa valeur en $t = T$ ne coïncide pas nécessairement avec $x(T)$.

Dans un second temps on considérera des lois de commande choisies dans l'espace $H^{-1}(0,T;U) := (H^1_0(0,T;U))^*$, et on verra que la possibilité de choisir de tels contrôles est loin d'être évidente. D'une part, on donnera une condition suffisante pour que de tels contrôles permettent de faire sens de $x(T)$ comme au paragraphe précédent. D'autre part, on proposera un exemple élémentaire pour lequel il est impossible de prendre des lois de commande dans $H^{-1}(0,T;U)$.

Références

[1] J.-L. Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1.* 1988.

Contact : `davron@ceremade.dauphine.fr`