

Méthode de contraste de sources pour la cartographie électromagnétique en imagerie médicale

Stephanie Lohrengel, Charlotte Milano, Stéphanie Salmon

Laboratoire de Mathématiques de Reims, Université de Reims Champagne Ardenne

Congrès d'Analyse Numérique - 28 mai 2024

Financé par l'ANR ELECTRA - ANR-21-CE19-0040.



Plan de l'exposé

- Introduction et contexte
- Équations de Maxwell et problème direct
- Problème inverse : Contrast Source Inversion Method
- Conclusion et perspectives

Contexte

Objectif

Reconstruire les **propriétés électromagnétiques (permittivité et conductivité)** des tissus du cerveau humain à partir de mesures radiofréquence (RF) effectuées par des scanners d'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM).

Les propriétés électromagnétiques

- **Permittivité** ϵ (*Farad par mètre*) : propriété physique qui décrit la réponse d'un matériau à un champ électrique externe appliqué.
- **Conductivité** σ (*Siemens par mètre*) : mesure de la capacité d'un matériau à conduire un courant électrique en réponse à un champ électrique externe appliqué.

Pourquoi les mesurer ?

- ▷ biomarqueurs (diagnostic de maladies (cancer))
- ▷ standard de sécurité (SAR)

Imagerie par résonance magnétique (IRM)

- ▷ Technique médicale puissante permettant d'obtenir des vues en 2 ou 3 dimensions de l'intérieur du corps et des mesures in vivo de façon non invasive et non irradiante
- ▷ Principe de la résonance magnétique nucléaire des atomes d'hydrogène contenus dans les tissus
- ▷ Envoi d'un **champ magnétique fixe** B_0 (Teslas) et d'un **champ radiofréquence uniforme** (B_1) (perpendiculaire à B_0) envoyé par les antennes radiofréquence



Figure – Appareil IRM



Figure – Image IRM d'une tête humaine

Birdcage : une antenne radiofréquence

- ▷ Type d'antenne volumique permettant l'émission et la réception d'un champ radiofréquence uniforme autour de la région d'intérêt
- ▷ Directement intégrée à la machine IRM ou spécifiquement dédiée à certaines parties du corps
- ▷ Constituée de **legs** (typiquement 8, 16 ou 32)

Modélisation d'une birdcage

- ▷ Ω : domaine d'étude
- ▷ $D \subset \Omega$: domaine où sont prises les mesures
- ▷ line sources représentant les legs



Figure – Birdcage

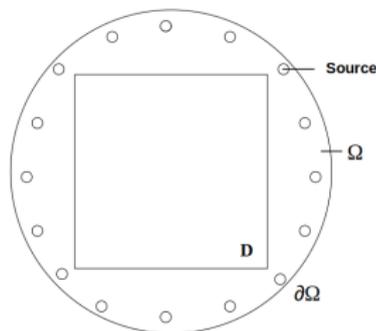


Figure – Schéma 2D d'une Birdcage

Les équations de Maxwell

- 4 champs inconnus :
- champ électrique $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbf{x}, t)$, $[V.m^{-1}]$
 - champ de déplacement $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbf{x}, t)$, $[C.m^{-2}]$
 - champ magnétique $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{x}, t)$, $[A.m^{-1}]$
 - induction magnétique $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{x}, t)$, $[T]$

Les équations de Maxwell en 3D

- $\partial_t \mathcal{D} - \text{curl} \mathcal{H} = -\mathcal{J}$ (Maxwell - Ampère)
- $\partial_t \mathcal{B} + \text{curl} \mathcal{E} = 0$ (Faraday)
- $\text{div} \mathcal{D} = \rho$ (Gauss)
- $\text{div} \mathcal{B} = 0$

\mathcal{J} : densité de courant $[A.m^{-2}]$

ρ : densité de charges $[C.m^{-3}]$

Reformulation

▷ Régime harmonique

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} \hat{E}(\mathbf{x})) \quad \mathcal{B}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} \hat{B}(\mathbf{x}))$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} \hat{D}(\mathbf{x})) \quad \mathcal{J}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} \hat{J}(\mathbf{x}))$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} \hat{H}(\mathbf{x})) \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} \hat{\rho}(\mathbf{x}))$$

▷ Utilisation des lois de constitution

$$\hat{D} = \varepsilon \hat{E} \text{ et } \hat{B} = \mu \hat{H} \quad (1)$$

ε : la permittivité électrique du milieu ($F.m^{-1}$)

μ : la perméabilité magnétique du milieu ($H.m^{-1}$)

▷ Utilisation de la loi d'Ohm

$$\hat{J} = \sigma \hat{E} + \hat{J}_s$$

\hat{J}_s : Terme source

σ : conductivité du milieu ($S.m^{-1}$)

Reformulation

▷ **Scaling** : $E = \sqrt{\epsilon_0} \hat{E}$, $H = \sqrt{\mu_0} \hat{H}$ (ϵ_0 et μ_0 paramètres du **vide**)

On obtient :

$$\begin{cases} -\text{curl}H - ik\epsilon_r E = -\sqrt{\mu_0} \hat{J}_s \\ \text{curl}E - ik\mu_r H = 0 \end{cases} \quad (2)$$

où

$$\epsilon_r = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\boldsymbol{\epsilon} + i \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\omega} \right) : \text{la permittivité relative}$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} : \text{perméabilité magnétique relative}$$

$$k = \frac{\omega}{c_0} : \text{nombre d'onde}$$

Formulation électrique en 2D

▷ Formulation **E** (élimination de H dans (2))

$$\operatorname{curl}(\mu_r^{-1} \operatorname{curl} E) - k^2 \epsilon_r E = ik \sqrt{\mu_0} \hat{j}_s \quad (3)$$

▷ Mode **transverse magnétique 2D** :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}, \vec{j}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{j}_s \end{pmatrix}, \text{ et } \mu_r = 1 \implies -\Delta E - k^2 \epsilon_r E = ik \sqrt{\mu_0} \hat{j}_s$$

En appliquant une condition de conducteur parfait sur un borné Ω :

$$\begin{cases} -\Delta E - k^2 \epsilon_r E = ik \sqrt{\mu_0} \hat{j}_s & \text{dans } \Omega \\ E = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4)$$

Problème direct

E^{tot} : champ électrique total en présence de l'objet d'intérêt

E^{ref} : champ de référence sans l'objet (généré par le même champ source j_s)

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta E^{tot} - k^2 \epsilon_r E^{tot} = j_s \text{ dans } \Omega \text{ (a)} \\ -\Delta E^{ref} - k^2 E^{ref} = j_s \text{ dans } \Omega \text{ (b)} \\ E^{tot} = 0, E^{ref} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (5)$$

Problème direct

Soit E^{ref} la solution de (5) pour une source donnée. Pour un ϵ_r donné, trouvez le champ diffracté $E^{sc} = E^{tot} - E^{ref}$ solution de [$E^{ref} + E^{sc}$ dans (a)] :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta E^{sc} - k^2 \epsilon_r E^{sc} = -k^2 (1 - \epsilon_r) E^{ref} \text{ dans } \Omega \\ E^{sc} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (6)$$

(En supposant que $k^2 \notin sp(-\Delta^{Dir})$)

$$\mathcal{P}_{direct} : L^\infty(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega), \quad \epsilon_r \longmapsto E^{sc}$$

Problème inverse

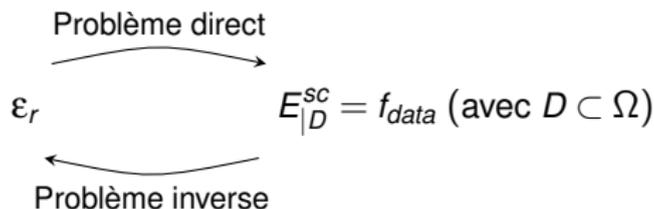
Problème inverse

Soit E^{ref} la solution de (5) pour une source donnée.

Soit f_{data} des **données** récoltées sur $D \subset \Omega$, trouvez ε_r tel que

$$E_{|D}^{sc} = f_{data} \quad [f_{data} = G_D\{\mathcal{P}_{direct}[\varepsilon_r]\}]$$

Pour E^{ref} donné :



Difficultés

- ▷ problème inverse d'identification de paramètres (l'opérateur différentiel dépend de ε_r)
- ▷ \mathcal{P}_{direct} fait intervenir ε_r , résolution d'un problème direct

Problème inverse

Reformulation : problème de reconstruction de source non linéaire

- ▷ 2 inconnus : ε_r et E^{tot}
- ▷ Reformulation de $\mathcal{P}_{direct} \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{L}}_b [(a) - (b)]$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_b : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ (\varepsilon_r, E^{tot}) &\longmapsto E^{sc} \end{aligned}$$

où $E^{sc} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est la solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta E^{sc} - k^2 E^{sc} = -k^2(1 - \varepsilon_r) E^{tot} & \text{dans } \Omega \\ E^{sc} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (7)$$

Difficulté

- ▷ Problème inverse non linéaire en ε_r et E^{tot} .

Contrast Source Inversion Method

Contrast Source Inversion Method ¹

On pose : $\chi = 1 - \varepsilon_r$ la **fonction de contraste** et $w = \chi E^{tot}$ la **fonction de contraste de source**.

▷ Reformulation de $\tilde{\mathcal{L}}_b \rightsquigarrow \mathcal{L}_b$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_b : L^2(\Omega) &\longrightarrow H^1(\Omega) \\ w &\longmapsto E^{sc} \end{aligned}$$

où $E^{sc} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est la solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta E^{sc} - k^2 E^{sc} = -k^2 w & \text{dans } \Omega \\ E^{sc} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (8)$$

▷ Problème de reconstruction de source linéaire en w

▷ **Objectif** : Reconstruire la fonction de contraste χ , qui a son support dans l'objet d'intérêt et qui vaut $\chi = 1 - \varepsilon_r$ (où $\varepsilon_r = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right)$).

Équation de données et d'état

$$E^{tot} = E^{ref} + \mathcal{L}_b[w] \Rightarrow \begin{cases} f_{data} = G_D\{\mathcal{L}_b[w]\} & \text{[équation de données]} \\ \chi(E^{ref} + \mathcal{L}_b[w]) = w & \text{[équation d'état]} \end{cases}$$

- ▷ problème d'optimisation de l'équation de données sous la contrainte de l'équation d'état
 ▷ minimisation d'une fonction coût au sens des moindres carrés

Fonction coût

$$\mathcal{F}(w, \chi) = \mathcal{F}^{data}(w) + \mathcal{F}^{state}(w, \chi)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{data}(w) &= \frac{\eta_1}{2} \|f_{data} - G_D\{\mathcal{L}_b[w]\}\|_D^2 \\ \mathcal{F}^{state}(w, \chi) &= \frac{\eta_2}{2} \|\chi(E^{ref} + \mathcal{L}_b[w]) - w\|_D^2 \end{aligned}$$

- ▷ méthode itérative en 2 étapes : • MAJ de w_n par une méthode de gradient sur \mathcal{F}
 • MAJ de χ_n par la minimisation de \mathcal{F}^{state}

Algorithme de la méthode

- **Data** : E^{ref} , k , f_{data}
- **Initialisation** : w_0 , χ_0 , $E_0^{sc} = \mathcal{L}_b(w_0)$, $v_0 = -g_0$, n_{max}

WHILE $n < n_{max}$:

- $w_{n+1} = w_n + \alpha_n v_n$ (**MAJ fonction de contraste de source**)
 $\hookrightarrow \alpha_n$: pas optimal (explicite qui dépend de $\mathcal{L}_b(v_n)$)
 $\hookrightarrow v_n$: direction de **Polak-Ribière** donnée par : $v_n = -g_n + \frac{\langle g_n, g_n - g_{n-1} \rangle_D}{\langle g_{n-1}, g_{n-1} \rangle_D} v_{n-1}$
- $E_{n+1}^{sc} = E_n^{sc} + \alpha_n \mathcal{L}_b(v_n)$ (**MAJ champ diffracté**)
- $E_{n+1}^{tot} = E^{ref} + \frac{E_{n+1}^{sc}}{w_{n+1}}$ (**MAJ champ total**)
- $\chi_{n+1} = \frac{w_{n+1} E_{n+1}^{tot}}{|E_{n+1}^{tot}|^2}$ (**MAJ fonction de contraste**)
- $\rho_{n+1} = f_{data} - E_{n+1}^{sc}|_D$ (**Erreur de données à l'itération n+1**)
 \hookrightarrow calcul de $(G^D \circ \mathcal{L}_b)^*[\rho_{n+1}]$ pour MAJ de g_{n+1}

▷ **2 systèmes linéaires** à résoudre par itérations (méthode des éléments finis, même matrice pour $k \in \mathbb{R}$)

Résultats avec données synthétiques pour le champ électrique

Reconstruction d'un disque avec la permittivité relative (matière blanche à 128 [Mhz] (3T)) :

$$\epsilon_r = \begin{cases} 52.5 + 48.028i & \text{dans l'objet} \\ 1 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

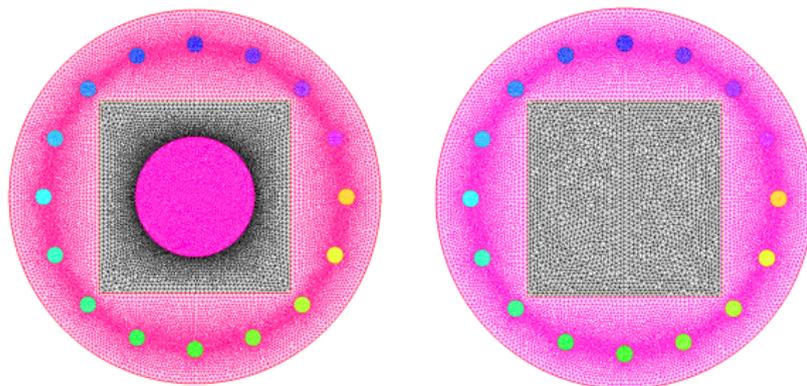
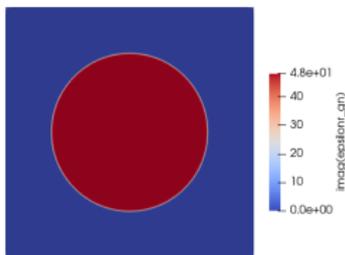
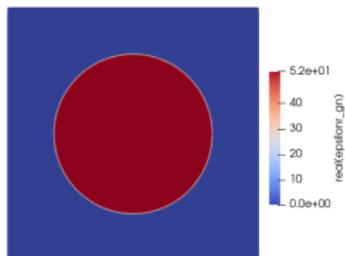
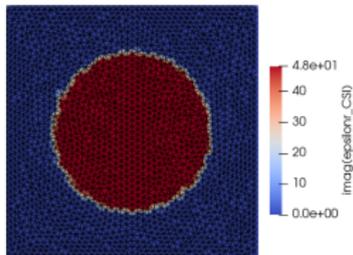
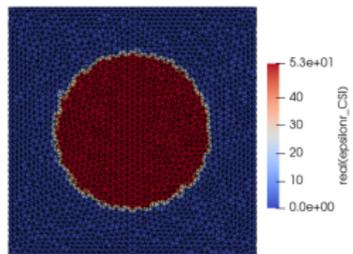
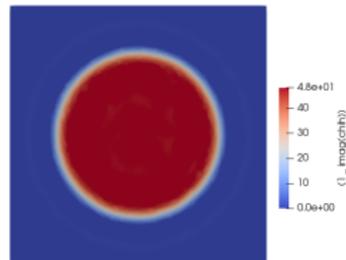
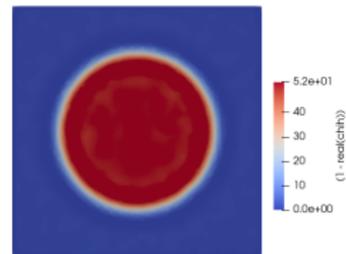


Figure – Maillage génération des données et du problème inverse (≈ 2000 mesures)

Figure – ε_r sur Ω_{gn} Figure – ε_r sur Ω_{CSI} Figure – Reconstruction ε_r (5 000 itérations)

Valeur moyenne de ε_r dans l'objet : $51.98 + 47.26i$ ($\approx 1\%$ erreur relative)

Données bruitées

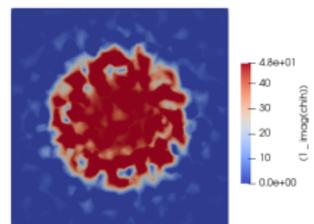
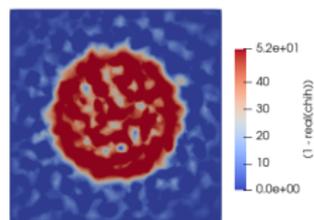


Figure – (0.5%)

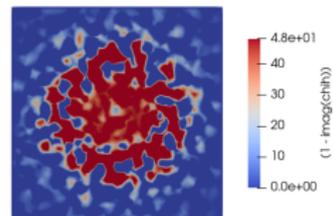
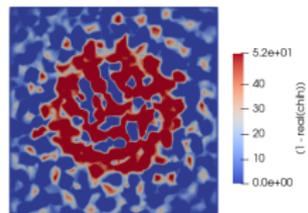


Figure – (2%)

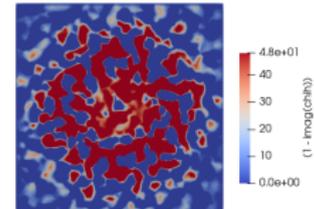
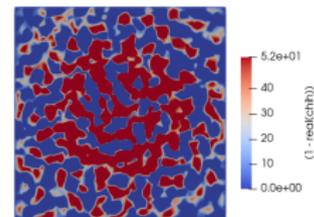
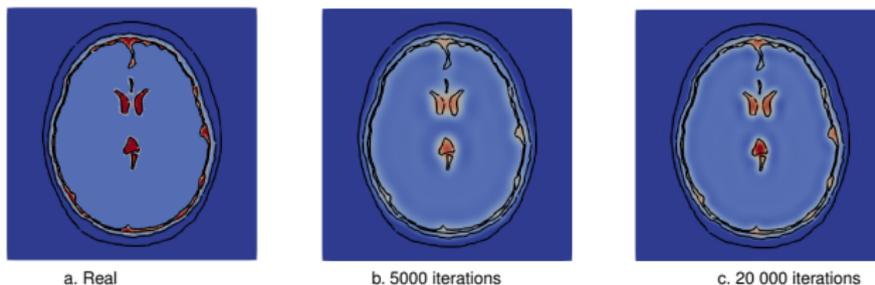
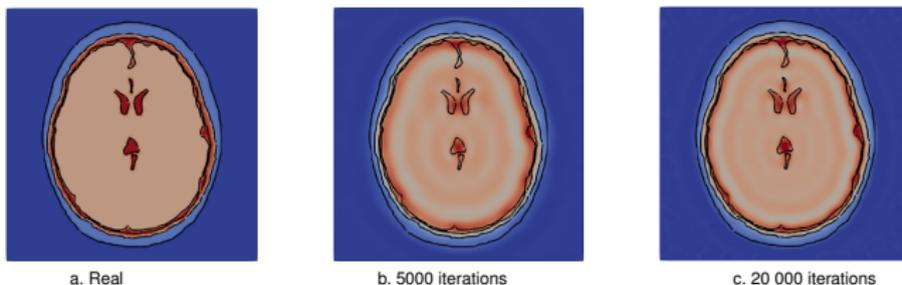


Figure – (5%)

Simulation avec un maillage réaliste de cerveau humain (12 000 mesures sur D) :



Vers des données réalistes

Quel est l'observable en IRM ?

L'IRM ne mesure pas le champ électrique, mais le champ B_1^+ (lié au champ magnétique diffracté) :

$$B_1^+ = \frac{H_x^{SC} + iH_y^{SC}}{2} \text{ sur } D$$

Difficultés

- ▷ Adaptation de l'équation de données
- ▷ Gradient plus difficile à calculer (nécessite le calcul de l'adjoint de l'opérateur curl)

Vers des données réalistes

Équation de données

Équations de Maxwell ($\mu_r = 1$) : $\text{curl} \mathbf{E} = ik \mathbf{H}$

En 2D (TM) : $\mathbf{H} = -\frac{i}{k} \text{curl} E = -\frac{i}{k} (\partial_y E, -\partial_x E)^t$

[équation de données] \Rightarrow $f_{\text{data}} = (G_D \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{C} \circ \mathcal{L}_b)[w]$

Opérateur Curl \mathcal{C}

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow (L^2(\Omega))^2 \\ E^{\text{sc}} &\longmapsto -\frac{i}{k} \text{curl} E^{\text{sc}} \end{aligned}$$

Opérateur $B_1^+ \mathcal{P}$

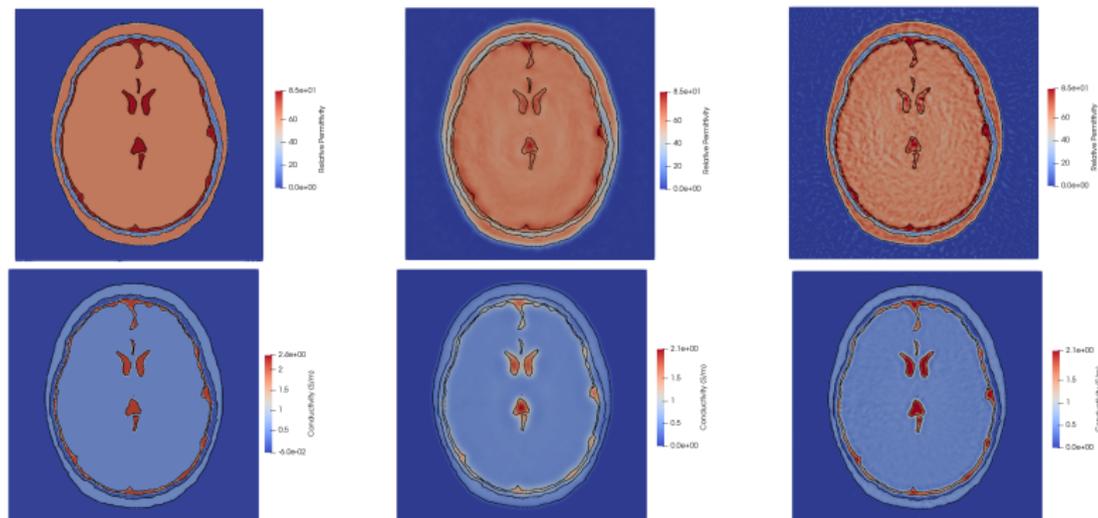
$$\begin{aligned} \mathcal{P} : (L^2(\Omega))^2 &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ \mathbf{u} &\longmapsto \frac{u_x + iu_y}{2} \end{aligned}$$

▷ changement du pas α

▷ changement du gradient

Résultats pour des données synthétiques réalistes B_1^+

Simulation avec un maillage réaliste de cerveau humain (27 000 mesures sur D (plus de mesures qu'en électrique)) :



Permittivité et conductivité après 40 et 100 itérations

Conclusion et perspectives

Conclusion

- ▷ Reconstruction des propriétés électriques qui **fonctionne** (configuration académique et réaliste) avec la simulation d'une birdcage coil pour le champ électrique
- ▷ Développement de la méthode pour des données réalistes B_1^+

Perspectives

- ▷ Méthode de régularisation pour augmenter la robustesse par rapport au bruit
- ▷ Mise au point d'une reconstruction 3D
- ▷ Travailler avec des données expérimentales sur un fantôme du laboratoire IADI (IADI - Inserm U1254 (Imagerie Adaptative Diagnostique et Interventionnelle), CHRU Nancy)