Simulation de condensats de Bose-Einstein et vortex quantiques

Quentin CHAULEUR, Laboratoire Paul Painlevé - Lille

On s'intéresse dans cet exposé à la discrétisation de l'équation de Gross-Pitaevskii avec potentiel dépendant du temps

$$i\partial_t \psi + \Delta\psi = |\psi|^2\psi + V(t,x)\psi. \tag{GP}$$

On se place sur un ouvert borné connexe polygonal (si $d = 2$) ou polyèdrale (si $d = 3$) avec bords Lipchitz $\partial\Omega$, pour un horizon de temps fini $T > 0$, avec conditions aux bords homogènes de Dirichlet et condition initiale $\psi(0) = \psi_0 \in H^5(\Omega)$.

Pour un pas de temps discret $\tau > 0$ tel que $N = T/\tau$, en notant $G_n(\tau, x) = \int_0^\tau V(t_n + s, x)\mathrm{d}s$ on introduit le schéma numérique

$$U^n = e^{i\tau A} e^{-iP_h G_n(\tau)} e^{-i\tau |U_{n-1}|^2} U^{n-1}, \quad U^0 = P_h(\psi_0), \tag{LT}$$

avec discrétisation de type splitting de Lie-Trotter en temps et discrétisation en espace A du laplacien Δ de l'équation (GP) par une approximation de flux à 2 points (TPFA). Le paramètre $h > 0$ désigne le diamètre maximal des volumes de contrôle. On s'intéresse alors au résultat suivant, issu de [1] :

Théorème 1. *Sous une condition de petitesse de τ et h, et de régularité de la solution continue de* (GP) *ainsi que du potentiel V, la solution numérique $(U^n)_n$ converge fortement en norme H_h^1 discrète vers la projection ponctuelle de la solution continue $P_h\psi(t_n)$ en ordre 1 en temps et en espace, sous une hypothèse de condition CFL de type $\tau|\log h|^2 \leq 1$ pour $d = 2$ et $\tau \leq h$ for $d = 3$, de sorte que*

$$\|P_h\psi(t_n) - U^n\|_{H_h^1} \leq C(h + \tau).$$

On s'intéresse également à la formation et à la détection numérique de vortex, via l'approximation discrète de la pseudo-vorticité du fluide quantique

$$\omega(\psi) = \Re\nabla\psi \times \Im\nabla\psi$$

en norme L_h^1 discrète. L'évolution de telles structures de vortex et leur reconnection sont notamment d'un intérêt particulier pour la théorie de la turbulence quantique, et pour certaines limites d'échelles entre théorie classique et théorique quantique pour des gazs atomes froids. Des simulations numériques, pour différentes géométries, viendront appuyer et illustrer ces résultats.

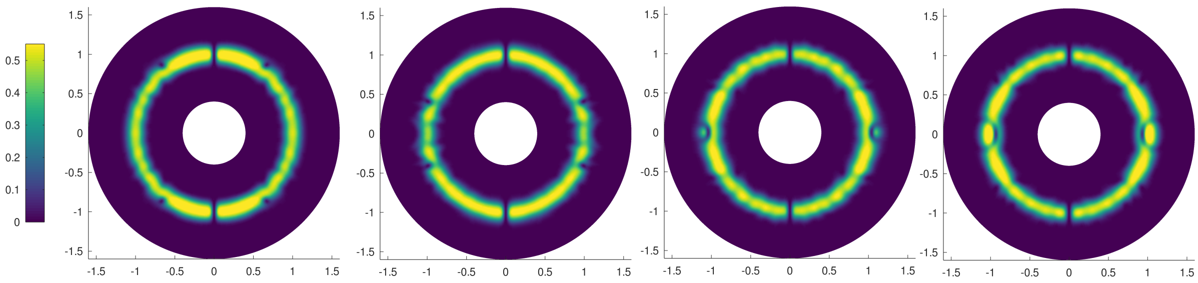

Figure 1 – Évolution de la densité $|\psi(t,\cdot)|^2$ d'une solution de (GP) avec collision de deux paires de vortex pour une géometrie annulaire.

[1] Q. Chauleur. *Finite volumes for the Gross-Pitaevskii equation*, 2024. Preprint, archived at arxiv 2402.03821.

Contact : quentin.chauleur@math.cnrs.fr