Etude du spectre de l'équation de McKendrick semi-discrétisée

Laurent Attias[1], Vincent Siess[2], Stéphane Labbé[1]

[1]LJLL, Sorbonne Université, [2]Dassault Systèmes

CANUM, Île de Ré, 28 mai 2024

Contexte

Dynamique de populations structurées

- Equation de McKendrick :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t \phi(t,a) + \partial_a \phi(t,a) + \mu(a)\phi(t,a) = 0 \\ \phi(t,0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} b(a)\phi(t,a)\,\mathrm{d}a \\ \phi(0,a) = \phi_0(a) \end{array}\right.$$

  - ϕ : densité de population
  - μ : mortalité
  - b : natalité
  - a : âge
- apparue en épidémiologie [McKendrick, 1925, Kermack and McKendrick, 1927], intervient en démographie
- étudiée par des méthodes liées aux équations intégrales de Volterra et à la transformation de Laplace [Feller, 1941, Bellman and Cooke, 1963]

- Proposition d'un cadre générique pour les modèles de dynamiques de populations structurées, basé sur l'équation de McKendrick (travaux soumis)

$$\begin{cases} \partial_t \phi(t,a,x) + \partial_a \phi(t,a,x) + \displaystyle\sum_{j=1}^{p} K_j(t,\phi(t),a,x) = 0 \\ \phi(t,0,x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{D}} b(t,\phi(t),a,x,y)\phi(t,a,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}a \\ \phi(0,a,x) = \phi_0(a,x) \end{cases}$$

  - $x \in \mathbb{D}$ où $\mathbb{D}$ est un ensemble d'hyperparamètres $\rightarrow$ compartiments
  - $\phi \in L^1([0,T] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D})$: densité de population
  - K_j → mortalité / échanges entre compartiments
  - b : taux de natalité

- Opérateur d'échange K_j de noyau d'échange k_j :

$$K_j(t,\phi(t),a,x) = \int_{\mathbb{D}} \left(k_j(t,\phi(t),a,x,y)\phi(t,a,y) - k_j(t,\phi(t),a,y,x)\phi(t,a,x)\right) \mathrm{d}y$$

Système proies-prédateurs structuré en âge

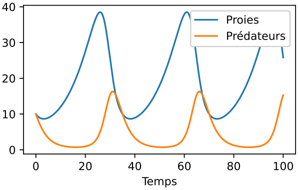
Contexte : système proies-prédateurs

- Système d'équations de Lotka-Volterra

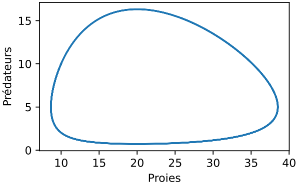
$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{d}_t x(t) & = & \alpha x(t) - \beta y(t) x(t) \\ \mathrm{d}_t y(t) & = & \delta x(t) y(t) - \gamma y(t) \end{array} \right.$$

  - x : nombre de proies
  - y : nombre de prédateurs
  - α : taux de natalité des proies
  - β : taux de mortalité des proies due à la prédation
  - γ : taux de mortalité des prédateurs
  - δ : taux de natalité des proies due à la prédation

- Voir [Wangersky, 1978, Takeuchi, 1996, Cherniha and Davydovych, 2022] pour une analyse détaillée.



(a) Evolution temporelle



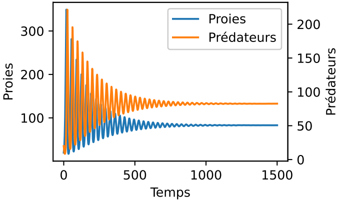
(b) Portrait de phase

Figure 1 – Système proies-prédateurs

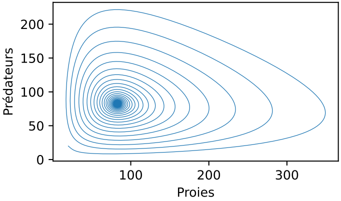
Système proies-prédateurs structuré en âge

$$\begin{cases} \partial_t x(t,a) + \partial_a x(t,a) + \left(\int_0^{+\infty} \beta\left(a,\tilde{a}\right) y\left(t,\tilde{a}\right) \,\mathrm{d}\tilde{a}\right) x(t,a) = 0 \\ \partial_t y(t,a) + \partial_a y(t,a) + \gamma(a) y(t,a) = 0 \\ x(t,0) = \int_0^{+\infty} \alpha(a) x(t,a) \,\mathrm{d}a \\ y(t,0) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \delta\left(a,\tilde{a}\right) x\left(t,\tilde{a}\right) \,\mathrm{d}\tilde{a} \,\mathrm{d}a \\ x(0,a) = x_0(a) \\ y(0,a) = y_0(a) \end{cases}$$

avec α, γ (resp. β, δ) à support compact dans $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$).



(a) Evolution temporelle



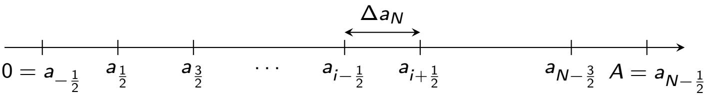
(b) Portrait de phase

Figure 2 – Système proies-prédateurs

Système proies-prédateurs structuré en âge

Semi-discrétisation en âge

- Discrétisation uniforme de $[0, A]$ en N classes d'âge



- Schéma de discrétisation décentré amont :
  - $x\left(t, a_{i+\frac{1}{2}}\right)$ est approché par $\displaystyle\frac{1}{\Delta a_N} \int_{a_{i-\frac{1}{2}}}^{a_{i+\frac{1}{2}}} x(t,a)\,\mathrm{d}a$
  - $y\left(t, a_{i+\frac{1}{2}}\right)$ est approché par $\displaystyle\frac{1}{\Delta a_N} \int_{a_{i-\frac{1}{2}}}^{a_{i+\frac{1}{2}}} y(t,a)\,\mathrm{d}a$

$$\left\{\begin{array}{rcl} X_i(t) & = & \displaystyle\int_{a_{i-\frac{1}{2}}}^{a_{i+\frac{1}{2}}} x(t,a)\,\mathrm{d}a \\ Y_i(t) & = & \displaystyle\int_{a_{i-\frac{1}{2}}}^{a_{i+\frac{1}{2}}} y(t,a)\,\mathrm{d}a \end{array}\right.$$

Système proies-prédateurs structuré en âge

Semi-discrétisation en âge

- Équations semi-discrétisées :

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}_t X_i + \dfrac{X_i - X_{i-1}}{\Delta a_N} + \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \beta_{ik} Y_k \right) X_i = 0 & 1 \leqslant i \leqslant N-1 \\
\mathrm{d}_t X_0 + \dfrac{1}{\Delta a_N} X_0 - \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k X_k + \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \beta_{0k} Y_k \right) X_0 = 0 & \\
\mathrm{d}_t Y_i + \dfrac{Y_i - Y_{i-1}}{\Delta a_N} + \gamma_i Y_i = 0 & 1 \leqslant i \leqslant N-1 \\
\mathrm{d}_t Y_0 + \dfrac{1}{\Delta a_N} Y_0 - \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \delta_{jk} X_k \right) Y_j + \gamma_0 Y_0 = 0 &
\end{cases}
$$

- $\alpha_i = \frac{1}{\Delta a_N} \displaystyle\int_{a_{i-\frac{1}{2}}}^{a_{i+\frac{1}{2}}} \alpha(a)\,\mathrm{d}a, \qquad \beta_{ij} = \frac{1}{\Delta a_N{}^2} \displaystyle\int_{a_{i-\frac{1}{2}}}^{a_{i+\frac{1}{2}}} \int_{a_{j-\frac{1}{2}}}^{a_{j+\frac{1}{2}}} \beta(a, \tilde{a})\,\mathrm{d}\tilde{a}\,\mathrm{d}a$

  $\gamma_i = \frac{1}{\Delta a_N} \displaystyle\int_{a_{i-\frac{1}{2}}}^{a_{i+\frac{1}{2}}} \gamma(a)\,\mathrm{d}a, \qquad \delta_{ij} = \frac{1}{\Delta a_N{}^2} \displaystyle\int_{a_{i-\frac{1}{2}}}^{a_{i+\frac{1}{2}}} \int_{a_{j-\frac{1}{2}}}^{a_{j+\frac{1}{2}}} \delta(a, \tilde{a})\,\mathrm{d}\tilde{a}\,\mathrm{d}a$

Système proies-prédateurs structuré en âge

Observations numériques

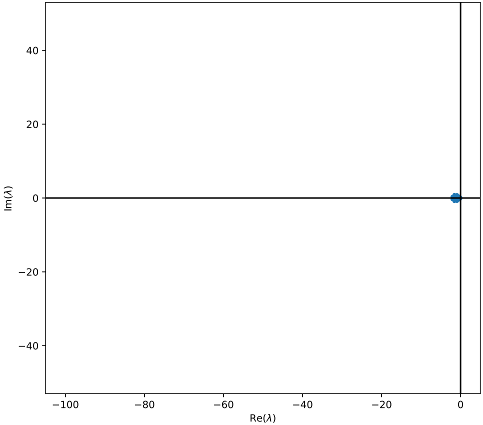


Figure 3 – Valeurs propres de la jacobienne du système proies-prédateurs semi-discrétisé en fin de simulation, pour $N = 10$

Système proies-prédateurs structuré en âge

Observations numériques

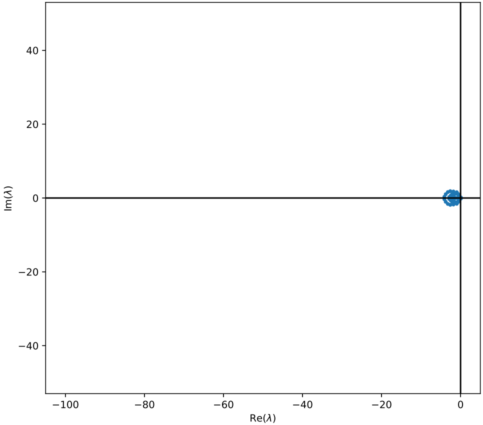


Figure 3 – Valeurs propres de la jacobienne du système proies-prédateurs semi-discrétisé en fin de simulation, pour $N = 20$

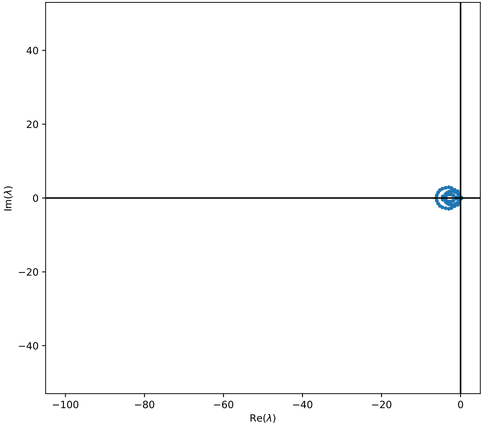


Figure 3 – Valeurs propres de la jacobienne du système proies-prédateurs semi-discrétisé en fin de simulation, pour $N = 30$

Système proies-prédateurs structuré en âge

Observations numériques

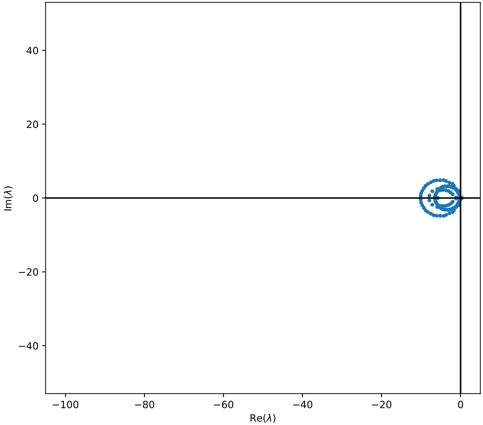


Figure 3 – Valeurs propres de la jacobienne du système proies-prédateurs semi-discrétisé en fin de simulation, pour $N = 50$

Système proies-prédateurs structuré en âge

Observations numériques

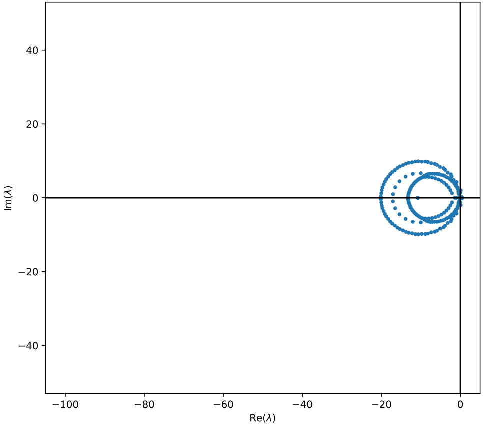


Figure 3 – Valeurs propres de la jacobienne du système proies-prédateurs semi-discrétisé en fin de simulation, pour $N = 100$

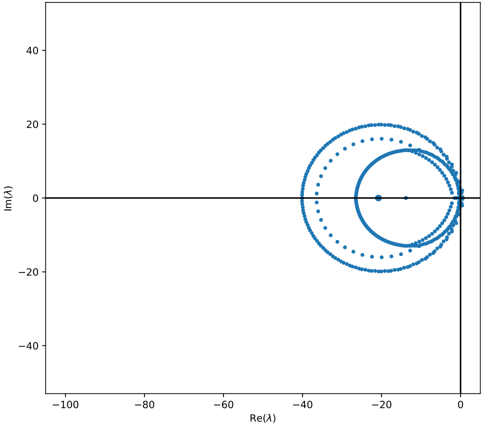


Figure 3 – Valeurs propres de la jacobienne du système proies-prédateurs semi-discrétisé en fin de simulation, pour $N = 200$

Système proies-prédateurs structuré en âge

Observations numériques

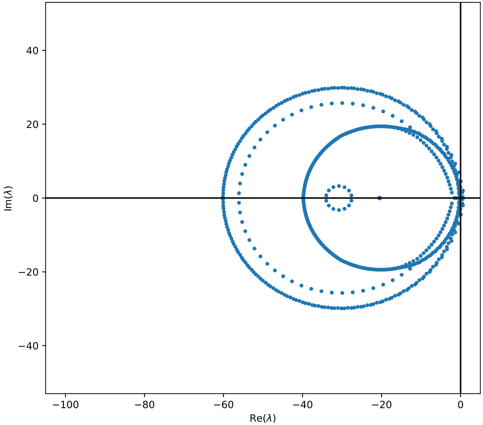


Figure 3 – Valeurs propres de la jacobienne du système proies-prédateurs semi-discrétisé en fin de simulation, pour $N = 300$

Système proies-prédateurs structuré en âge

Observations numériques

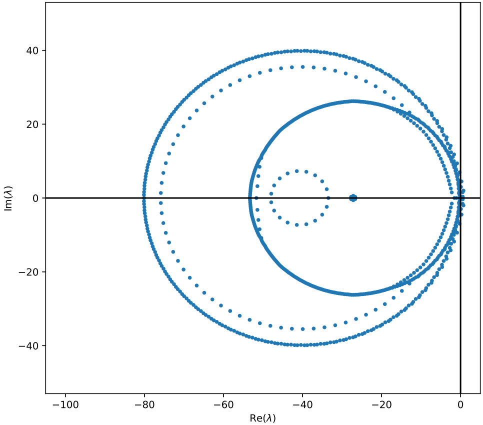


Figure 3 – Valeurs propres de la jacobienne du système proies-prédateurs semi-discrétisé en fin de simulation, pour $N = 400$

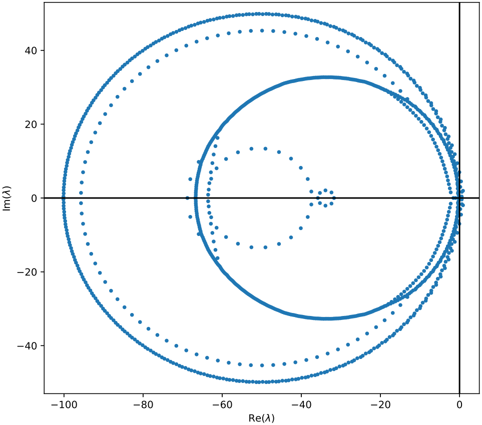


Figure 3 – Valeurs propres de la jacobienne du système proies-prédateurs semi-discrétisé en fin de simulation, pour $N = 500$

- Réduction du système Lotka-Volterra à un système McKendrick pur
- Opérateur de McKendrick linéaire
  $\Rightarrow$ étudier la stabilité via les valeurs propres de la jacobienne revient à étudier les valeurs propres de l'opérateur lui-même
- Conjecture numérique : répartition asymptotique des valeurs propres autour d'un cercle de centre $\left(-\dfrac{1}{\Delta a_N}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{\Delta a_N}$

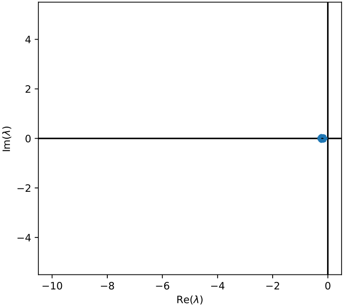


Figure 4 – Valeurs propres de l'équation de McKendrick semi-discrétisée, pour $N = 10$

Système proies-prédateurs structuré en âge

Passage à une dynamique de population type McKendrick

- Réduction du système Lotka-Volterra à un système McKendrick pur
- Opérateur de McKendrick linéaire
  $\Rightarrow$ étudier la stabilité via les valeurs propres de la jacobienne revient à étudier les valeurs propres de l'opérateur lui-même
- Conjecture numérique : répartition asymptotique des valeurs propres autour d'un cercle de centre $\left(-\dfrac{1}{\Delta a_N}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{\Delta a_N}$

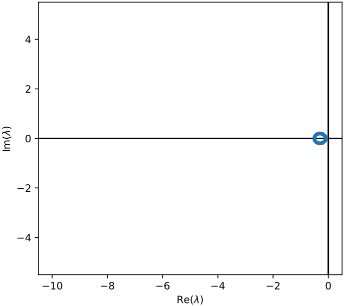


Figure 4 – Valeurs propres de l'équation de McKendrick semi-discrétisée, pour $N = 20$

- Réduction du système Lotka-Volterra à un système McKendrick pur
- Opérateur de McKendrick linéaire
  $\Rightarrow$ étudier la stabilité via les valeurs propres de la jacobienne revient à étudier les valeurs propres de l'opérateur lui-même
- Conjecture numérique : répartition asymptotique des valeurs propres autour d'un cercle de centre $\left(-\frac{1}{\Delta a_N}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{\Delta a_N}$

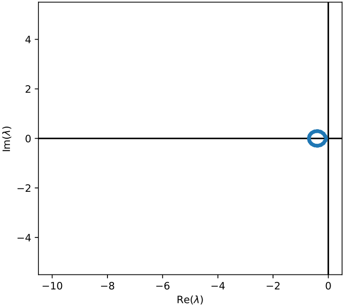


Figure 4 – Valeurs propres de l'équation de McKendrick semi-discrétisée, pour $N = 30$

- Réduction du système Lotka-Volterra à un système McKendrick pur
- Opérateur de McKendrick linéaire
  $\Rightarrow$ étudier la stabilité via les valeurs propres de la jacobienne revient à étudier les valeurs propres de l'opérateur lui-même
- Conjecture numérique : répartition asymptotique des valeurs propres autour d'un cercle de centre $\left(-\frac{1}{\Delta a_N}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{\Delta a_N}$

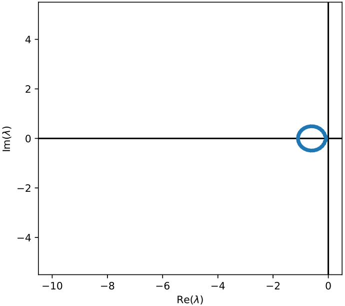


Figure 4 – Valeurs propres de l'équation de McKendrick semi-discrétisée, pour $N = 50$

Système proies-prédateurs structuré en âge

Passage à une dynamique de population type McKendrick

- Réduction du système Lotka-Volterra à un système McKendrick pur
- Opérateur de McKendrick linéaire $\Rightarrow$ étudier la stabilité via les valeurs propres de la jacobienne revient à étudier les valeurs propres de l'opérateur lui-même
- Conjecture numérique : répartition asymptotique des valeurs propres autour d'un cercle de centre $\left(-\dfrac{1}{\Delta a_N}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{\Delta a_N}$

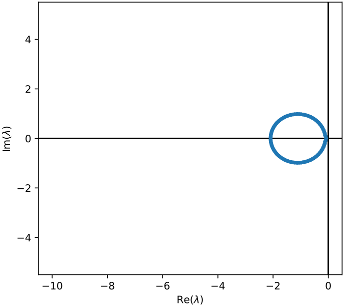


Figure 4 – Valeurs propres de l'équation de McKendrick semi-discrétisée, pour $N = 100$

Système proies-prédateurs structuré en âge

Passage à une dynamique de population type McKendrick

- Réduction du système Lotka-Volterra à un système McKendrick pur
- Opérateur de McKendrick linéaire
  $\Rightarrow$ étudier la stabilité via les valeurs propres de la jacobienne revient à étudier les valeurs propres de l'opérateur lui-même
- Conjecture numérique : répartition asymptotique des valeurs propres autour d'un cercle de centre $\left(-\dfrac{1}{\Delta a_N}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{\Delta a_N}$

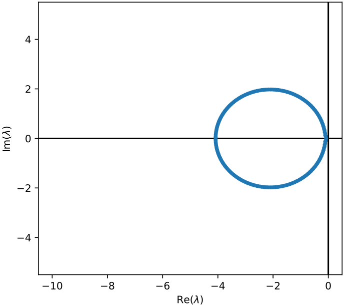


Figure 4 – Valeurs propres de l'équation de McKendrick semi-discrétisée, pour $N = 200$

- Réduction du système Lotka-Volterra à un système McKendrick pur
- Opérateur de McKendrick linéaire $\Rightarrow$ étudier la stabilité via les valeurs propres de la jacobienne revient à étudier les valeurs propres de l'opérateur lui-même
- Conjecture numérique : répartition asymptotique des valeurs propres autour d'un cercle de centre $\left(-\frac{1}{\Delta a_N}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{\Delta a_N}$

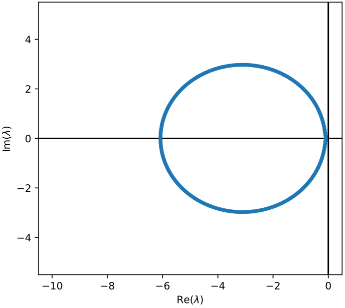


Figure 4 – Valeurs propres de l'équation de McKendrick semi-discrétisée, pour $N = 300$

Système proies-prédateurs structuré en âge

Passage à une dynamique de population type McKendrick

- Réduction du système Lotka-Volterra à un système McKendrick pur
- Opérateur de McKendrick linéaire
$\Rightarrow$ étudier la stabilité via les valeurs propres de la jacobienne revient à étudier les valeurs propres de l'opérateur lui-même
- Conjecture numérique : répartition asymptotique des valeurs propres autour d'un cercle de centre $\left(-\dfrac{1}{\Delta a_N}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{\Delta a_N}$

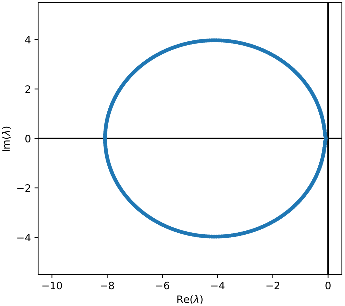


Figure 4 – Valeurs propres de l'équation de McKendrick semi-discrétisée, pour $N = 400$

Système proies-prédateurs structuré en âge

Passage à une dynamique de population type McKendrick

- Réduction du système Lotka-Volterra à un système McKendrick pur
- Opérateur de McKendrick linéaire
  $\Rightarrow$ étudier la stabilité via les valeurs propres de la jacobienne revient à étudier les valeurs propres de l'opérateur lui-même
- Conjecture numérique : répartition asymptotique des valeurs propres autour d'un cercle de centre $\left(-\dfrac{1}{\Delta a_N}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{\Delta a_N}$

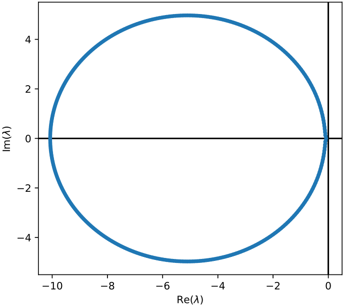


Figure 4 – Valeurs propres de l'équation de McKendrick semi-discrétisée, pour $N = 500$

Equation de McKendrick semi-discrétisée en âge

Formulation du problème aux valeurs propres

- Equations semi-discrétisées :

$$\begin{cases} \mathrm{d}_t\psi_i + \dfrac{\psi_i - \psi_{i-1}}{\Delta a_N} + \mu_i\psi_i & = & 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant N-1 \\ \mathrm{d}_t\psi_0 + \dfrac{1}{\Delta a_N}\psi_0 - \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} b_k\psi_k + \mu_0\psi_0 & = & 0 \end{cases}$$

- N classes d'âge
- $\psi_i(t) = \displaystyle\int_{a_{i-\frac{1}{2}}}^{a_{i+\frac{1}{2}}} \phi(t,a)\,\mathrm{d}a$
- schéma décentré amont : $\phi\left(t, a_{i+\frac{1}{2}}\right) \approx \dfrac{1}{\Delta a_N}\displaystyle\int_{a_{i-\frac{1}{2}}}^{a_{i+\frac{1}{2}}} \phi(t,a)\,\mathrm{d}a$
- $b_i = \dfrac{1}{\Delta a_N}\displaystyle\int_{a_{i-\frac{1}{2}}}^{a_{i+\frac{1}{2}}} b(a)\,\mathrm{d}a$
- $\mu_i = \dfrac{1}{\Delta a_N}\displaystyle\int_{a_{i-\frac{1}{2}}}^{a_{i+\frac{1}{2}}} \mu(a)\,\mathrm{d}a$

Equation de McKendrick semi-discrétisée en âge

Formulation du problème aux valeurs propres

- Problème aux valeurs propres :

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\psi_i - \psi_{i-1}}{\Delta a_N} + \mu_i \psi_i\right) & = & \lambda \psi_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant N-1 \\ -\left(\dfrac{1}{\Delta a_N}\psi_0 - \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} b_k \psi_k + \mu_0 \psi_0\right) & = & \lambda \psi_0 \end{cases}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(\psi_1 \cdots \psi_N) \in \left(L^1(I, \mathbb{C})\right)^N$

- Equation aux valeurs propres :

$$-\prod_{k=0}^{N-1} (1 + \Delta a_N (\mu_k + \lambda)) + \Delta a_N \sum_{i=0}^{N-1} b_i \prod_{k=i+1}^{N-1} (1 + \Delta a_N (\mu_k + \lambda)) = 0$$

- Hypothèse sur les classes d'âges fertiles :
  - $b_i = 0$ pour $i \notin [\![n-m, n]\!]$, avec $n \sim \beta N$ et $m \sim \alpha n$
  - remise à l'échelle : $z = 1 + \Delta a_n \lambda$
  - équation aux valeurs propres réduite :

$$\prod_{k=1}^{n} (z + \Delta a_n \mu_k) = \Delta a_n \sum_{i=n-m}^{n} b_i \prod_{k=i+1}^{n} (z + \Delta a_n \mu_k) \qquad (E_n)$$

Equation de McKendrick semi-discrétisée en âge

Répartition asymptotique des valeurs propres

$$\prod_{k=1}^{n}(z+\Delta a_n \mu_k) = \Delta a_n \sum_{i=n-m}^{n} b_i \prod_{k=i+1}^{n}(z+\Delta a_n \mu_k) \quad (E_n)$$

Théorème : propriétés asymptotique des valeur propres de (E_n)

On suppose la natalité et la mortalité constantes par morceaux.

1. *Soit (z_n) une suite de solutions de (E_n). Alors* $\lim_{n\to+\infty} |z_n| = 1$
2. *Pour tout $z_0 = e^{i\theta_0}$ dans $\mathbb{U}$, il existe (z_n) une suite de solutions de (E_n) qui converge vers z_0.*

$\Rightarrow$ densité de l'ensemble des solutions des équations (E_n) dans le cercle unité

$$\prod_{k=1}^{n}(z+\Delta a_n \mu_k) = \Delta a_n \sum_{i=n-m}^{n} b_i \prod_{k=i+1}^{n}(z+\Delta a_n \mu_k) \quad (E_n)$$

Démonstration.

1. ❶ $R = \limsup_{n\to+\infty} |z_n| \leqslant 1$. Si $R > 1$, pour n assez grand,

$$\left(\frac{R+1}{2}\right)^{1-\alpha} \leqslant |z_n| \leqslant \underbrace{u_n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

❷ $\liminf_{n\to+\infty} |z_n| \geqslant 1$. Sinon soit L tel que $(|z_n|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} L < 1$.
Sous l'hypothèse constante par morceaux, réécrire (E_n) sous la forme

$$\prod_{j=0}^{K-1}(z_n+\Delta a_n M_j)^{p_n} = \underbrace{\Delta a_n}_{\sim \frac{A\beta}{n}} \sum_{j=0}^{K-1} C_j \underbrace{\prod_{l=0}^{j-1}(z_n+\Delta a_n M_l)^{p_n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, j\neq 0} \frac{\overbrace{(z_n+\Delta a_n M_j)^{p_n}}^{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} - 1}{z_n+\Delta a_n M_j - 1}$$

$$\sim \frac{C}{n}$$

□

Equation de McKendrick semi-discrétisée en âge

Répartition asymptotique des valeurs propres

$$\prod_{k=1}^{n} (z + \Delta a_n \mu_k) = \Delta a_n \sum_{i=n-m}^{n} b_i \prod_{k=i+1}^{n} (z + \Delta a_n \mu_k) \quad (E_n)$$

Démonstration.

1. ❶ $R = \limsup_{n \to +\infty} |z_n| \leqslant 1$. Si $R > 1$, pour n assez grand,

$$\left(\frac{R+1}{2}\right)^{1-\alpha} \leqslant |z_n| \leqslant \underbrace{u_n}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}$$

❷ $\liminf_{n \to +\infty} |z_n| \geqslant 1$. Sinon soit L tel que $(|z_n|) \xrightarrow[n \to +\infty]{} L < 1$.
Passage au logarithme puis contradiction :

$$\underbrace{\sum_{j=0}^{K-1} \ln \left| z_n + \Delta a_n M_j \right|}_{\leqslant K \ln(L) < 0} = \underbrace{\frac{\ln(C) - \ln(n)}{p_n} + o(1)}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$$

□

Equation de McKendrick semi-discrétisée en âge

Répartition asymptotique des valeurs propres

$$\prod_{k=1}^{n}(z+\Delta a_n \mu_k) = \Delta a_n \sum_{i=n-m}^{n} b_i \prod_{k=i+1}^{n}(z+\Delta a_n \mu_k) \quad (E_n)$$

Démonstration.

2

1. reformulation de (E_n) comme une équation de point fixe
2. bijection entre $\mathcal{D}_{n,\theta_0}$ et $\overline{\mathcal{D}}(0,2)$ pour se ramener à un compact
3. théorème du point fixe de Brouwer sur $\overline{\mathcal{D}}(0,2)$ □

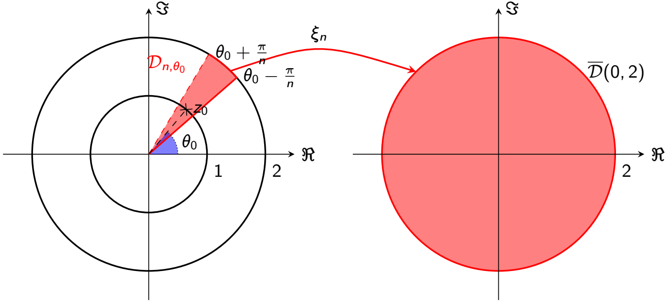


Figure 5 – Bijection entre $\mathcal{D}_{n,\theta_0}$ et $\overline{\mathcal{D}}(0,2)$

Conclusion

- résultat de densité sur la répartition des valeurs propres pour une équation de McKendrick semi-discrétisée en âge
- application à l'étude de la stabilité de systèmes de populations structurées basés sur le formalisme de McKendrick généralisé
- application aux propriétés de la matrice de Leslie
- lien avec le spectre continu de l'EDP de McKendrick

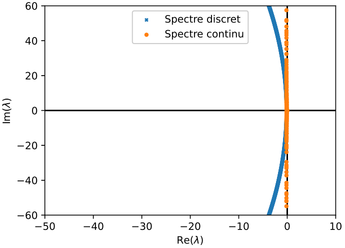


Figure 6 – Spectres continu et discret de l'équation de McKendrick

Conclusion

- résultat de densité sur la répartition des valeurs propres pour une équation de McKendrick semi-discrétisée en âge
- application à l'étude de la stabilité de systèmes de populations structurées basés sur le formalisme de McKendrick généralisé
- application aux propriétés de la matrice de Leslie
- lien avec le spectre continu de l'EDP de McKendrick

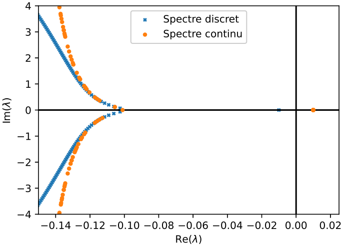


Figure 6 – Spectres continu et discret de l'équation de McKendrick

Références

Richard Bellman and Kenneth L. Cooke. *Differential-Difference Equations*. The RAND Corporation, New York, 1963.

Roman Cherniha and Vasyl' Davydovych. Construction and application of exact solutions of the diffusive Lotka–Volterra system : A review and new results. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 113, 2022.

Willy Feller. On the Integral Equation of Renewal Theory. *The Annals of Mathematical Statistics*, 12(3) :243–267, 1941. doi : http://doi.org/10.1214/aoms/1177731708.

W. O. Kermack and A. G. McKendrick. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 115(772) :700–721, 1927.

A. G. McKendrick. Applications of Mathematics to Medical Problems. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 44 :98–130, 1925.

Y Takeuchi. *Global Dynamical Properties of Lotka-Volterra Systems*. World Scientific, 1996. doi : 10.1142/2942.

Peter J. Wangersky. Lotka-Volterra Population Models. *Annual Review of Ecology and Systematics*, 9(1) :189–218, 1978. doi : https://doi.org/10.1146/annurev.es.09.110178.001201.