

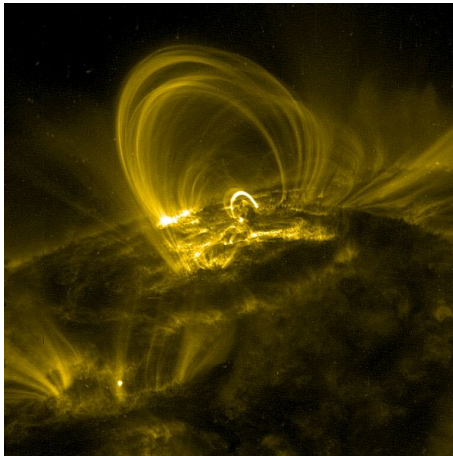
Temps de vie des solutions en magnétohydrodynamique idéale

Dimitri COBB

travail en collaboration avec Francesco FANELLI

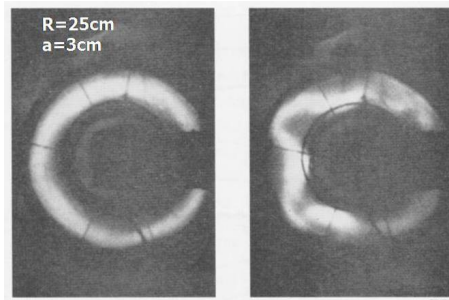
28 mai 2024

Fluides conducteurs



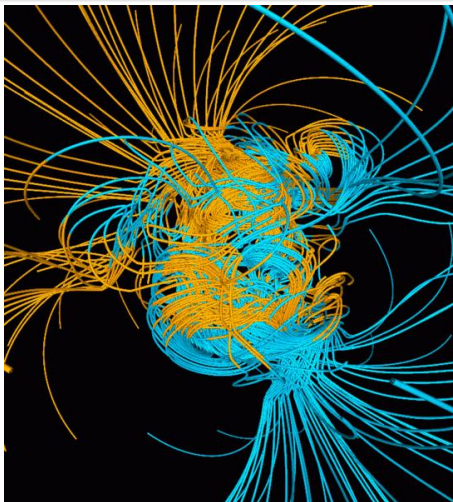
NASA (*Transition Region And Coronal Explorer*). Image sur <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Traceimage.jpg>

Fluides conducteurs



UK Atomic Energy Authority. (Instabilité dans un plasma). Image sur https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kink_instability_at_Aldermaston.jpg

Fluides conducteurs



NASA (Gary Glatzmaier of Los Alamos and UC Santa Cruz). Image sur https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Geodynamo_After_Reversal.gif

Fluides conducteurs

Objectif : étude des fluides conducteurs de courant.

Fluides conducteurs

Objectif : étude des fluides conducteurs de courant.

Courant électrique

Fluides conducteurs

Objectif : étude des fluides conducteurs de courant.

Courant électrique \rightarrow Champ magnétique

Fluides conducteurs

Objectif : étude des fluides conducteurs de courant.

Courant électrique \rightarrow Champ magnétique \rightarrow Force de Laplace

Fluides conducteurs

Objectif : étude des fluides conducteurs de courant.

Courant électrique \longrightarrow Champ magnétique \longrightarrow Force de Laplace \longrightarrow Changement de la dynamique

Fluides conducteurs

Objectif : étude des fluides conducteurs de courant.

Courant électrique \longrightarrow Champ magnétique \longrightarrow Force de Laplace \longrightarrow Changement de la dynamique \longrightarrow Courant électrique.

Fluides conducteurs

Objectif : étude des fluides conducteurs de courant.

Courant électrique \longrightarrow Champ magnétique \longrightarrow Force de Laplace \longrightarrow Changement de la dynamique \longrightarrow Courant électrique.

Magnétohydrodynamique (MHD) : pour un fluide parfait (incompressible, non-visqueux et parfaitement conducteur)

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \Pi = (b \cdot \nabla)b - \frac{1}{2} \nabla (|b|^2) \\ \partial_t b + (u \cdot \nabla)b = (b \cdot \nabla)u \\ \operatorname{div}(u) = 0 \\ \operatorname{div}(b) = 0. \end{cases}$$

Fluides conducteurs

Objectif : étude des fluides conducteurs de courant.

Courant électrique \longrightarrow Champ magnétique \longrightarrow Force de Laplace \longrightarrow Changement de la dynamique \longrightarrow Courant électrique.

Magnétohydrodynamique (MHD) : $u : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \nabla \Pi = (b \cdot \nabla) b - \frac{1}{2} \nabla (|b|^2) \\ \partial_t b + (u \cdot \nabla) b = (b \cdot \nabla) u \\ \operatorname{div}(u) = 0 \\ \operatorname{div}(b) = 0. \end{cases}$$

Fluides conducteurs

Objectif : étude des fluides conducteurs de courant.

Courant électrique \longrightarrow Champ magnétique \longrightarrow Force de Laplace \longrightarrow Changement de la dynamique \longrightarrow Courant électrique.

Magnétohydrodynamique (MHD) : $\Pi : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \Pi = (b \cdot \nabla)b - \frac{1}{2} \nabla (|b|^2) \\ \partial_t b + (u \cdot \nabla)b = (b \cdot \nabla)u \\ \operatorname{div}(u) = 0 \\ \operatorname{div}(b) = 0. \end{cases}$$

Fluides conducteurs

Objectif : étude des fluides conducteurs de courant.

Courant électrique \longrightarrow Champ magnétique \longrightarrow Force de Laplace \longrightarrow Changement de la dynamique \longrightarrow Courant électrique.

Magnétohydrodynamique (MHD) : $\mathbf{b} : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \Pi = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} - \frac{1}{2} \nabla (|\mathbf{b}|^2) \\ \partial_t \mathbf{b} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \\ \operatorname{div}(\mathbf{b}) = 0. \end{cases}$$

Fluides conducteurs

Objectif : étude des fluides conducteurs de courant.

Courant électrique \longrightarrow Champ magnétique \longrightarrow Force de Laplace \longrightarrow Changement de la dynamique \longrightarrow Courant électrique.

Magnétohydrodynamique (MHD) :

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \Pi = (b \cdot \nabla)b - \frac{1}{2} \nabla (|b|^2) \\ \partial_t b + (u \cdot \nabla)b = (b \cdot \nabla)u \\ \operatorname{div}(u) = 0 \\ \operatorname{div}(b) = 0. \end{cases}$$

Fluides conducteurs

Objectif : étude des fluides conducteurs de courant.

Courant électrique \longrightarrow Champ magnétique \longrightarrow Force de Laplace \longrightarrow Changement de la dynamique \longrightarrow Courant électrique.

Magnétohydrodynamique (MHD) :

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \Pi = (b \cdot \nabla)b - \frac{1}{2} \nabla (|b|^2) \\ \partial_t b + (u \cdot \nabla)b = (b \cdot \nabla)u \\ \operatorname{div}(u) = 0 \\ \operatorname{div}(b) = 0. \end{cases}$$

Objectif : existence et unicité des solutions à données initiales fixées.

Structure du système : théorie L^2

Le système de la MHD idéale est "hyperbolique" et quasi-linéaire

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \Pi = (b \cdot \nabla)b - \frac{1}{2} \nabla (|b|^2) \\ \partial_t b + (u \cdot \nabla)b = (b \cdot \nabla)u \\ \operatorname{div}(u) = 0 \\ \operatorname{div}(b) = 0. \end{cases}$$

Structure du système : théorie L^2

Le système de la MHD idéale est "hyperbolique" et quasi-linéaire

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \Pi = (b \cdot \nabla)b - \frac{1}{2} \nabla (|b|^2) \\ \partial_t b + (u \cdot \nabla)b = (b \cdot \nabla)u \\ \operatorname{div}(u) = 0 \\ \operatorname{div}(b) = 0. \end{cases}$$

Mais il est aussi symétrique : l'énergie totale (cinétique + magnétique) est conservée

$$\begin{aligned} (\partial_t + u \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} |u|^2 \right) &= \operatorname{div} \left(\left(\Pi + \frac{1}{2} |b|^2 \right) u \right) + (b \cdot \nabla) b \cdot u \\ (\partial_t + u \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} |b|^2 \right) &= (b \cdot \nabla) u \cdot b \end{aligned}$$

Structure du système : théorie L^2

Le système de la MHD idéale est "hyperbolique" et quasi-linéaire

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \Pi = (b \cdot \nabla)b - \frac{1}{2} \nabla (|b|^2) \\ \partial_t b + (u \cdot \nabla)b = (b \cdot \nabla)u \\ \operatorname{div}(u) = 0 \\ \operatorname{div}(b) = 0. \end{cases}$$

Mais il est aussi symétrique : l'énergie totale (cinétique + magnétique) est conservée

$$\begin{aligned} (\partial_t + u \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} |u|^2 \right) &= \operatorname{div} \left(\left(\Pi + \frac{1}{2} |b|^2 \right) u \right) + (b \cdot \nabla) b \cdot u \\ (\partial_t + u \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} |b|^2 \right) &= (b \cdot \nabla) u \cdot b \end{aligned}$$

Conséquence:

- **existence et unicité de solutions locales** dans des espaces basés sur L^2 , p. ex. $X = H^{1+d/2+\epsilon}$ ou $X = B_{2,1}^{1+d/2}$.

Structure du système : théorie L^2

Le système de la MHD idéale est "hyperbolique" et quasi-linéaire

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \Pi = (b \cdot \nabla)b - \frac{1}{2} \nabla (|b|^2) \\ \partial_t b + (u \cdot \nabla)b = (b \cdot \nabla)u \\ \operatorname{div}(u) = 0 \\ \operatorname{div}(b) = 0. \end{cases}$$

Mais il est aussi symétrique : l'énergie totale (cinétique + magnétique) est conservée

$$\begin{aligned} (\partial_t + u \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} |u|^2 \right) &= \operatorname{div} \left(\left(\Pi + \frac{1}{2} |b|^2 \right) u \right) + (b \cdot \nabla) b \cdot u \\ (\partial_t + u \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} |b|^2 \right) &= (b \cdot \nabla) u \cdot b \end{aligned}$$

Conséquence:

- **existence et unicité de solutions locales** dans des espaces basés sur L^2 , p. ex. $X = H^{1+d/2+\epsilon}$ ou $X = B_{2,1}^{1+d/2}$. La raison : $X \hookrightarrow W^{1,\infty}$.

Structure du système : théorie L^2

Le système de la MHD idéale est "hyperbolique" et quasi-linéaire

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \Pi = (b \cdot \nabla)b - \frac{1}{2} \nabla (|b|^2) \\ \partial_t b + (u \cdot \nabla)b = (b \cdot \nabla)u \\ \operatorname{div}(u) = 0 \\ \operatorname{div}(b) = 0. \end{cases}$$

Mais il est aussi symétrique : l'énergie totale (cinétique + magnétique) est conservée

$$\begin{aligned} (\partial_t + u \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} |u|^2 \right) &= \operatorname{div} \left(\left(\Pi + \frac{1}{2} |b|^2 \right) u \right) + (b \cdot \nabla)b \cdot u \\ (\partial_t + u \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} |b|^2 \right) &= (b \cdot \nabla)u \cdot b \end{aligned}$$

Conséquence:

- **existence et unicité de solutions locales** dans des espaces basés sur L^2 , p. ex. $X = H^{1+d/2+\epsilon}$ ou $X = B_{2,1}^{1+d/2}$. La raison : $X \hookrightarrow W^{1,\infty}$.
- Borne inférieure sur le **temps de vie** des solutions $T^* \geq \frac{1}{\|(u_0, b_0)\|_X}$.

Structure du système : théorie L^2

Le système de la MHD idéale est "hyperbolique" et quasi-linéaire

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \Pi = (b \cdot \nabla)b - \frac{1}{2} \nabla (|b|^2) \\ \partial_t b + (u \cdot \nabla)b = (b \cdot \nabla)u \\ \operatorname{div}(u) = 0 \\ \operatorname{div}(b) = 0. \end{cases}$$

Mais il est aussi symétrique : l'énergie totale (cinétique + magnétique) est conservée

$$\begin{aligned} (\partial_t + u \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} |u|^2 \right) &= \operatorname{div} \left(\left(\Pi + \frac{1}{2} |b|^2 \right) u \right) + (b \cdot \nabla) b \cdot u \\ (\partial_t + u \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} |b|^2 \right) &= (b \cdot \nabla) u \cdot b \end{aligned}$$

Conséquence:

- **existence et unicité de solutions locales** dans des espaces basés sur L^2 , p. ex. $X = H^{1+d/2+\epsilon}$ ou $X = B_{2,1}^{1+d/2}$. La raison : $X \hookrightarrow W^{1,\infty}$.
- Borne inférieure sur le **temps de vie** des solutions $T^* \geq \frac{1}{\|(u_0, b_0)\|_X}$.
- [Schmidt, 1988].

Structure du système : aller au delà de la théorie hyperbolique ?

Nos raisons de vouloir plus :

Structure du système : aller au delà de la théorie hyperbolique ?

Nos raisons de vouloir plus :

- 1 Solutions d'énergie infinie

Structure du système : aller au delà de la théorie hyperbolique ?

Nos raisons de vouloir plus :

- 1 Solutions d'énergie infinie $\rightarrow p \neq 2$,

Structure du système : aller au delà de la théorie hyperbolique ?

Nos raisons de vouloir plus :

- 1 Solutions d'énergie infinie $\rightarrow p \neq 2$,
- 2 Solutions dans des espaces plus gros $H^{1+d/2+\epsilon} \hookrightarrow B_{2,1}^{1+d/2} \hookrightarrow B_{\infty,1}^1 \hookrightarrow W^{1,\infty}$.

Structure du système : aller au delà de la théorie hyperbolique ?

Nos raisons de vouloir plus :

- ① Solutions d'énergie infinie $\rightarrow p \neq 2$,
- ② Solutions dans des espaces plus gros $H^{1+d/2+\epsilon} \hookrightarrow B_{2,1}^{1+d/2} \hookrightarrow B_{\infty,1}^1 \hookrightarrow W^{1,\infty}$.
On veut donc $p \neq 2$, et si possible $p = +\infty$.

Structure du système : aller au delà de la théorie hyperbolique ?

Nos raisons de vouloir plus :

- 1 Solutions d'énergie infinie $\rightarrow p \neq 2$,
- 2 Solutions dans des espaces plus gros $H^{1+d/2+\epsilon} \hookrightarrow B_{2,1}^{1+d/2} \hookrightarrow B_{\infty,1}^1 \hookrightarrow W^{1,\infty}$.
On veut donc $p \neq 2$, et si possible $p = +\infty$.
- 3 Le temps de vie $T^* \geq \frac{1}{\|(u_0, b_0)\|_X}$ n'est pas optimal.

Structure du système : aller au delà de la théorie hyperbolique ?

Nos raisons de vouloir plus :

- ① Solutions d'énergie infinie $\rightarrow p \neq 2$,
- ② Solutions dans des espaces plus gros $H^{1+d/2+\epsilon} \hookrightarrow B_{2,1}^{1+d/2} \hookrightarrow B_{\infty,1}^1 \hookrightarrow W^{1,\infty}$.
On veut donc $p \neq 2$, et si possible $p = +\infty$.
- ③ Le temps de vie $T_{\text{MHD}}^* \geq \frac{1}{\|(u_0, b_0)\|_X} = F(u_0, b_0)$ n'est pas optimal.

Structure du système : aller au delà de la théorie hyperbolique ?

Nos raisons de vouloir plus :

- 1 Solutions d'énergie infinie $\rightarrow p \neq 2$,
- 2 Solutions dans des espaces plus gros $H^{1+d/2+\epsilon} \hookrightarrow B_{2,1}^{1+d/2} \hookrightarrow B_{\infty,1}^1 \hookrightarrow W^{1,\infty}$.
On veut donc $p \neq 2$, et si possible $p = +\infty$.
- 3 Le temps de vie $T_{\text{MHD}}^* \geq \frac{1}{\|(u_0, b_0)\|_X} = F(u_0, b_0)$ n'est pas optimal.

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \Pi = (b \cdot \nabla)b - \frac{1}{2} \nabla (|b|^2) \\ \partial_t b + (u \cdot \nabla)b = (b \cdot \nabla)u \\ \operatorname{div}(u) = 0 \\ \operatorname{div}(b) = 0. \end{cases}$$

Structure du système : aller au delà de la théorie hyperbolique ?

Nos raisons de vouloir plus :

- 1 Solutions d'énergie infinie $\rightarrow p \neq 2$,
- 2 Solutions dans des espaces plus gros $H^{1+d/2+\epsilon} \hookrightarrow B_{2,1}^{1+d/2} \hookrightarrow B_{\infty,1}^1 \hookrightarrow W^{1,\infty}$.
On veut donc $p \neq 2$, et si possible $p = +\infty$.
- 3 Le temps de vie $T_{\text{MHD}}^* \geq \frac{1}{\|(u_0, b_0)\|_X} = F(u_0, b_0)$ n'est pas optimal.

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \Pi = (b \cdot \nabla)b - \frac{1}{2} \nabla (|b|^2) \\ \partial_t b + (u \cdot \nabla)b = (b \cdot \nabla)u \\ \operatorname{div}(u) = 0 \\ \operatorname{div}(b) = 0. \end{cases}$$

Si $b_0 \rightarrow 0$ alors MHD \rightarrow Euler. Mais en 2D

$$F(u_0, b_0) \rightarrow F(u_0, 0) < T_{\text{Euler}}^* = +\infty.$$

Structure du système : variable d'Elsässer

En réalité, la MHD idéale est un système d'équations de "transport". Changement de variables :

$$\alpha = u + b \quad \text{and} \quad \beta = u - b.$$

Structure du système : variable d'Elsässer

En réalité, la MHD idéale est un système d'équations de "transport". Changement de variables :

$$\alpha = u + b \quad \text{and} \quad \beta = u - b.$$

Alors

$$\begin{cases} \partial_t \alpha + (\beta \cdot \nabla) \alpha + \nabla \pi_1 = 0 \\ \partial_t \beta + (\alpha \cdot \nabla) \beta + \nabla \pi_2 = 0 \\ \operatorname{div}(\alpha) = 0 \\ \operatorname{div}(\beta) = 0. \end{cases}$$

Structure du système : variable d'Elsässer

En réalité, la MHD idéale est un système d'équations de "transport". Changement de variables :

$$\alpha = u + b \quad \text{and} \quad \beta = u - b.$$

Alors

$$\begin{cases} \partial_t \alpha + (\beta \cdot \nabla) \alpha + \nabla \pi_1 = 0 \\ \partial_t \beta + (\alpha \cdot \nabla) \beta + \nabla \pi_2 = 0 \\ \operatorname{div}(\alpha) = 0 \\ \operatorname{div}(\beta) = 0. \end{cases}$$

Les fonctions π_1 et π_2 sont *a priori* différentes : elles proviennent de deux contraintes différentes.

Structure du système : variable d'Elsässer

En réalité, la MHD idéale est un système d'équations de "transport". Changement de variables :

$$\alpha = u + b \quad \text{and} \quad \beta = u - b.$$

Alors

$$\exists \pi_1, \pi_2, \quad \begin{cases} \partial_t \alpha + (\beta \cdot \nabla) \alpha + \nabla \pi_1 = 0 \\ \partial_t \beta + (\alpha \cdot \nabla) \beta + \nabla \pi_2 = 0 \\ \operatorname{div}(\alpha) = 0 \\ \operatorname{div}(\beta) = 0. \end{cases}$$

Les fonctions π_1 et π_2 sont *a priori* différentes : elles proviennent de deux contraintes différentes.

Structure du système : variable d'Elsässer

En réalité, la MHD idéale est un système d'équations de "transport". Changement de variables :

$$\alpha = u + b \quad \text{and} \quad \beta = u - b.$$

Alors

$$\exists \pi_1, \pi_2, \quad \begin{cases} \partial_t \alpha + (\beta \cdot \nabla) \alpha + \nabla \pi_1 = 0 \\ \partial_t \beta + (\alpha \cdot \nabla) \beta + \nabla \pi_2 = 0 \\ \operatorname{div}(\alpha) = 0 \\ \operatorname{div}(\beta) = 0. \end{cases}$$

Les fonctions π_1 et π_2 sont *a priori* différentes : elles proviennent de deux contraintes différentes.

Remarque : les deux systèmes ne sont pas toujours équivalents.

Structure du système : variable d'Elsässer

En réalité, la MHD idéale est un système d'équations de "transport". Changement de variables :

$$\alpha = u + b \quad \text{and} \quad \beta = u - b.$$

Alors

$$\exists \pi_1, \pi_2, \quad \begin{cases} \partial_t \alpha + (\beta \cdot \nabla) \alpha + \nabla \pi_1 = 0 \\ \partial_t \beta + (\alpha \cdot \nabla) \beta + \nabla \pi_2 = 0 \\ \operatorname{div}(\alpha) = 0 \\ \operatorname{div}(\beta) = 0. \end{cases}$$

Les fonctions π_1 et π_2 sont *a priori* différentes : elles proviennent de deux contraintes différentes.

Remarque : les deux systèmes ne sont pas toujours équivalents.

Mais oublions provisoirement ce problème et continuons. Nous y reviendrons...

Estimations *a priori*

Méthode pour éliminer la pression, appliquer le rotationnel.

Estimations *a priori*

Méthode pour éliminer la pression, appliquer le rotationnel.

$$X_{ij} = \partial_j \alpha_i - \partial_i \alpha_j \quad \text{and} \quad Y_{ij} = \partial_j \beta_i - \partial_i \beta_j.$$

Estimations *a priori*

Méthode pour éliminer la pression, appliquer le rotationnel.

$$X_{ij} = \partial_j \alpha_i - \partial_i \alpha_j \quad \text{and} \quad Y_{ij} = \partial_j \beta_i - \partial_i \beta_j.$$

Alors :

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X_{ij} = \partial_i \beta_k \partial_k \alpha_j - \partial_j \beta_k \partial_k \alpha_i \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y_{ij} = \partial_i \alpha_k \partial_k \beta_j - \partial_j \alpha_k \partial_k \beta_i. \end{cases}$$

Quelles estimations ?

Estimations *a priori*

Méthode pour éliminer la pression, appliquer le rotationnel.

$$X_{ij} = \partial_j \alpha_i - \partial_i \alpha_j \quad \text{and} \quad Y_{ij} = \partial_j \beta_i - \partial_i \beta_j.$$

Alors :

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X_{ij} = \partial_i \beta_k \partial_k \alpha_j - \partial_j \beta_k \partial_k \alpha_i \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y_{ij} = \partial_i \alpha_k \partial_k \beta_j - \partial_j \alpha_k \partial_k \beta_i. \end{cases}$$

Quelles estimations ? Hölder ? $X, Y \in C^\alpha \Rightarrow \nabla \alpha, \nabla \beta \in C^\alpha$.

Estimations *a priori*

Méthode pour éliminer la pression, appliquer le rotationnel.

$$X_{ij} = \partial_j \alpha_i - \partial_i \alpha_j \quad \text{and} \quad Y_{ij} = \partial_j \beta_i - \partial_i \beta_j.$$

Alors :

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X_{ij} = \partial_i \beta_k \partial_k \alpha_j - \partial_j \beta_k \partial_k \alpha_i \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y_{ij} = \partial_i \alpha_k \partial_k \beta_j - \partial_j \alpha_k \partial_k \beta_i. \end{cases}$$

Quelles estimations ? Hölder ? $X, Y \in C^\alpha \Rightarrow \nabla \alpha, \nabla \beta \in C^\alpha$. Problème : effet de stretching/étirement...

$$\|X, Y\|_{C^\alpha} \lesssim \exp\left(C \int_0^t \|\nabla \alpha, \nabla \beta\|_{C^{1+\alpha}}\right) \left\{ \|X_0, Y_0\|_{C^\alpha} + \int_0^t \|RHS\|_{C^\alpha} \right\}.$$

Estimations *a priori*

Méthode pour éliminer la pression, appliquer le rotationnel.

$$X_{ij} = \partial_j \alpha_i - \partial_i \alpha_j \quad \text{and} \quad Y_{ij} = \partial_j \beta_i - \partial_i \beta_j.$$

Alors :

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X_{ij} = \partial_i \beta_k \partial_k \alpha_j - \partial_j \beta_k \partial_k \alpha_i \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y_{ij} = \partial_i \alpha_k \partial_k \beta_j - \partial_j \alpha_k \partial_k \beta_i. \end{cases}$$

Quelles estimations ? Lebesgue ?

Estimations *a priori*

Méthode pour éliminer la pression, appliquer le rotationnel.

$$X_{ij} = \partial_j \alpha_i - \partial_i \alpha_j \quad \text{and} \quad Y_{ij} = \partial_j \beta_i - \partial_i \beta_j.$$

Alors :

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X_{ij} = \partial_i \beta_k \partial_k \alpha_j - \partial_j \beta_k \partial_k \alpha_i \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y_{ij} = \partial_i \alpha_k \partial_k \beta_j - \partial_j \alpha_k \partial_k \beta_i. \end{cases}$$

Quelles estimations ? Lebesgue ? Pas de stretching...

$$\|X, Y\|_{L^\infty} \leq \|X_0, Y_0\|_{L^\infty} + \int_0^t \|RHS\|_{L^\infty}.$$

Estimations *a priori*

Méthode pour éliminer la pression, appliquer le rotationnel.

$$X_{ij} = \partial_j \alpha_i - \partial_i \alpha_j \quad \text{and} \quad Y_{ij} = \partial_j \beta_i - \partial_i \beta_j.$$

Alors :

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X_{ij} = \partial_i \beta_k \partial_k \alpha_j - \partial_j \beta_k \partial_k \alpha_i \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y_{ij} = \partial_i \alpha_k \partial_k \beta_j - \partial_j \alpha_k \partial_k \beta_i. \end{cases}$$

Quelles estimations ? Lebesgue ? Pas de stretching...

$$\|X, Y\|_{L^\infty} \leq \|X_0, Y_0\|_{L^\infty} + \int_0^t \|RHS\|_{L^\infty}.$$

Inconvénient majeur : $X, Y \in L^\infty \not\Rightarrow \nabla \alpha, \nabla \beta \in L^\infty$ et RHS pire encore !

Estimations *a priori*

Méthode pour éliminer la pression, appliquer le rotationnel.

$$X_{ij} = \partial_j \alpha_i - \partial_i \alpha_j \quad \text{and} \quad Y_{ij} = \partial_j \beta_i - \partial_i \beta_j.$$

Alors :

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X_{ij} = \partial_i \beta_k \partial_k \alpha_j - \partial_j \beta_k \partial_k \alpha_i \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y_{ij} = \partial_i \alpha_k \partial_k \beta_j - \partial_j \alpha_k \partial_k \beta_i. \end{cases}$$

Quelles estimations ? Solution : trouver un espace intermédiaire.

Estimations *a priori*

Méthode pour éliminer la pression, appliquer le rotationnel.

$$X_{ij} = \partial_j \alpha_i - \partial_i \alpha_j \quad \text{and} \quad Y_{ij} = \partial_j \beta_i - \partial_i \beta_j.$$

Alors :

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X_{ij} = \partial_i \beta_k \partial_k \alpha_j - \partial_j \beta_k \partial_k \alpha_i \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y_{ij} = \partial_i \alpha_k \partial_k \beta_j - \partial_j \alpha_k \partial_k \beta_i. \end{cases}$$

Quelles estimations ? Solution : trouver un espace intermédiaire. Espace de Besov :

$$L^\infty \subset B_{\infty,1}^0 \subset C^\epsilon.$$

Estimations *a priori*

Méthode pour éliminer la pression, appliquer le rotationnel.

$$X_{ij} = \partial_j \alpha_i - \partial_i \alpha_j \quad \text{and} \quad Y_{ij} = \partial_j \beta_i - \partial_i \beta_j.$$

Alors :

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X_{ij} = \partial_i \beta_k \partial_k \alpha_j - \partial_j \beta_k \partial_k \alpha_i \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y_{ij} = \partial_i \alpha_k \partial_k \beta_j - \partial_j \alpha_k \partial_k \beta_i. \end{cases}$$

Quelles estimations ? Solution : trouver un espace intermédiaire. Espace de Besov :

$$L^\infty \subset B_{\infty,1}^0 \subset C^\epsilon.$$

Avantage : estimations linéaires pour l'équation de transport

$$\|X, Y\|_{B_{\infty,1}^0} \lesssim \left(1 + \int_0^t \|\nabla \alpha, \nabla \beta\|_\infty\right) \left\{ \|X_0, Y_0\|_{B_{\infty,1}^0} + \int_0^t \|\text{RHS}\|_{B_{\infty,1}^0} \right\}.$$

Estimations *a priori*

Méthode pour éliminer la pression, appliquer le rotationnel.

$$X_{ij} = \partial_j \alpha_i - \partial_i \alpha_j \quad \text{and} \quad Y_{ij} = \partial_j \beta_i - \partial_i \beta_j.$$

Alors :

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X_{ij} = \partial_i \beta_k \partial_k \alpha_j - \partial_j \beta_k \partial_k \alpha_i \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y_{ij} = \partial_i \alpha_k \partial_k \beta_j - \partial_j \alpha_k \partial_k \beta_i. \end{cases}$$

Quelles estimations ? Solution : trouver un espace intermédiaire. Espace de Besov :

$$L^\infty \subset B_{\infty,1}^0 \subset C^\epsilon.$$

Avantage : estimations linéaires pour l'équation de transport

$$\|X, Y\|_{B_{\infty,1}^0} \lesssim \left(1 + \int_0^t \|\nabla \alpha, \nabla \beta\|_\infty\right) \left\{ \|X_0, Y_0\|_{B_{\infty,1}^0} + \int_0^t \|\text{RHS}\|_{B_{\infty,1}^0} \right\}.$$

Désavantage : le produit ponctuel des fonctions $B_{\infty,1}^0 \times B_{\infty,1}^0 \rightarrow B_{\infty,1}^0$ est mal défini/discontinu.

Le cas d'un fluide plan $d = 2$

Introduction des "tourbillons" $(X, Y) = \text{curl}(\alpha, \beta)$:

Le cas d'un fluide plan $d = 2$

Introduction des "tourbillons" $(X, Y) = \text{curl}(\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X = \mathcal{L}(\nabla \alpha, \nabla \beta) \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y = \mathcal{L}(\nabla \beta, \nabla \alpha). \end{cases}$$

Le cas d'un fluide plan $d = 2$

Introduction des "tourbillons" $(X, Y) = \text{curl}(\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X = \mathcal{L}(\nabla \alpha, \nabla \beta) \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y = \mathcal{L}(\nabla \beta, \nabla \alpha). \end{cases}$$

Dimension $d = 2$,

Le cas d'un fluide plan $d = 2$

Introduction des "tourbillons" $(X, Y) = \text{curl}(\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X = \mathcal{L}(\nabla \alpha, \nabla \beta) \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y = \mathcal{L}(\nabla \beta, \nabla \alpha). \end{cases}$$

Dimension $d = 2$, donc $X = \omega + j$ et $Y = \omega - j$ sont scalaires,

Le cas d'un fluide plan $d = 2$

Introduction des "tourbillons" $(X, Y) = \text{curl}(\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X = \mathcal{L}(\nabla \alpha, \nabla \beta) \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y = \mathcal{L}(\nabla \beta, \nabla \alpha). \end{cases}$$

Dimension $d = 2$, donc $X = \omega + j$ et $Y = \omega - j$ sont scalaires, et $\mathcal{L} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire anti-symétrique.

Le cas d'un fluide plan $d = 2$

Introduction des "tourbillons" $(X, Y) = \text{curl}(\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X = \mathcal{L}(\nabla \alpha, \nabla \beta) \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y = \mathcal{L}(\nabla \beta, \nabla \alpha). \end{cases}$$

Dimension $d = 2$, donc $X = \omega + j$ et $Y = \omega - j$ sont scalaires, et $\mathcal{L} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire anti-symétrique.

$$\mathcal{L}(\nabla \alpha, \nabla \beta) = \mathcal{L}(\nabla(u + b), \nabla(u - b))$$

Le cas d'un fluide plan $d = 2$

Introduction des "tourbillons" $(X, Y) = \text{curl}(\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X = \mathcal{L}(\nabla \alpha, \nabla \beta) \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y = \mathcal{L}(\nabla \beta, \nabla \alpha). \end{cases}$$

Dimension $d = 2$, donc $X = \omega + j$ et $Y = \omega - j$ sont scalaires, et $\mathcal{L} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire anti-symétrique.

$$\mathcal{L}(\nabla \alpha, \nabla \beta) = \mathcal{L}(\nabla(u + b), \nabla(u - b)) = 2\mathcal{L}(\nabla b, \nabla u)$$

Le cas d'un fluide plan $d = 2$

Introduction des "tourbillons" $(X, Y) = \text{curl}(\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X = \mathcal{L}(\nabla \alpha, \nabla \beta) \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y = \mathcal{L}(\nabla \beta, \nabla \alpha). \end{cases}$$

Dimension $d = 2$, donc $X = \omega + j$ et $Y = \omega - j$ sont scalaires, et $\mathcal{L} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire anti-symétrique.

$$\mathcal{L}(\nabla \alpha, \nabla \beta) = \mathcal{L}(\nabla(u + b), \nabla(u - b)) = 2\mathcal{L}(\nabla b, \nabla u)$$

Estimations linéaires:

$$\|X, Y\|_{B_{\infty,1}^0} \lesssim \left(1 + \int_0^t \|\nabla \alpha, \nabla \beta\|_{\infty}\right) \left\{ \|X_0, Y_0\|_{B_{\infty,1}^0} + \int_0^t \|\text{RHS}\|_{B_{\infty,1}^0} \right\}.$$

Le cas d'un fluide plan $d = 2$

Introduction des "tourbillons" $(X, Y) = \text{curl}(\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X = \mathcal{L}(\nabla \alpha, \nabla \beta) \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y = \mathcal{L}(\nabla \beta, \nabla \alpha). \end{cases}$$

Dimension $d = 2$, donc $X = \omega + j$ et $Y = \omega - j$ sont scalaires, et $\mathcal{L} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire anti-symétrique.

$$\mathcal{L}(\nabla \alpha, \nabla \beta) = \mathcal{L}(\nabla(u + b), \nabla(u - b)) = 2\mathcal{L}(\nabla b, \nabla u)$$

Estimations linéaires:

$$\|X, Y\|_{B_{\infty,1}^0} \lesssim \left(1 + \int_0^t \|\nabla \alpha, \nabla \beta\|_{\infty}\right) \left\{ \|X_0, Y_0\|_{B_{\infty,1}^0} + \int_0^t \|\text{RHS}\|_{B_{\infty,1}^0} \right\}.$$

Le cas d'un fluide plan $d = 2$

Introduction des "tourbillons" $(X, Y) = \text{curl}(\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X = \mathcal{L}(\nabla\alpha, \nabla\beta) \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y = \mathcal{L}(\nabla\beta, \nabla\alpha). \end{cases}$$

Dimension $d = 2$, donc $X = \omega + j$ et $Y = \omega - j$ sont scalaires, et $\mathcal{L} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire anti-symétrique.

$$\mathcal{L}(\nabla\alpha, \nabla\beta) = \mathcal{L}(\nabla(u + b), \nabla(u - b)) = 2\mathcal{L}(\nabla b, \nabla u)$$

Estimations linéaires:

$$\|X, Y\|_{B_{\infty,1}^0} \lesssim \left(1 + \int_0^t \|\nabla\alpha, \nabla\beta\|_{\infty}\right) \left\{ \|X_0, Y_0\|_{B_{\infty,1}^0} + \int_0^t \|\mathcal{L}(\nabla\alpha, \nabla\beta)\|_{B_{\infty,1}^0} \right\}.$$

Le cas d'un fluide plan $d = 2$

Introduction des "tourbillons" $(X, Y) = \text{curl}(\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X = \mathcal{L}(\nabla \alpha, \nabla \beta) \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y = \mathcal{L}(\nabla \beta, \nabla \alpha). \end{cases}$$

Dimension $d = 2$, donc $X = \omega + j$ et $Y = \omega - j$ sont scalaires, et $\mathcal{L} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire anti-symétrique.

$$\mathcal{L}(\nabla \alpha, \nabla \beta) = \mathcal{L}(\nabla(u + b), \nabla(u - b)) = 2\mathcal{L}(\nabla b, \nabla u)$$

Estimations linéaires:

$$\|X, Y\|_{B_{\infty,1}^0} \lesssim \left(1 + \int_0^t \|\nabla \alpha, \nabla \beta\|_{\infty}\right) \left\{ \|X_0, Y_0\|_{B_{\infty,1}^0} + \int_0^t \|\mathcal{L}(\nabla u, \nabla \beta)\|_{B_{\infty,1}^0} \right\}.$$

Le cas d'un fluide plan $d = 2$

Introduction des "tourbillons" $(X, Y) = \text{curl}(\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X = \mathcal{L}(\nabla\alpha, \nabla\beta) \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y = \mathcal{L}(\nabla\beta, \nabla\alpha). \end{cases}$$

Dimension $d = 2$, donc $X = \omega + j$ et $Y = \omega - j$ sont scalaires, et $\mathcal{L} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire anti-symétrique.

$$\mathcal{L}(\nabla\alpha, \nabla\beta) = \mathcal{L}(\nabla(u + b), \nabla(u - b)) = 2\mathcal{L}(\nabla b, \nabla u)$$

Estimations linéaires:

$$\|X, Y\|_{B_{\infty,1}^0} \lesssim \left(1 + \int_0^t \|\nabla\alpha, \nabla\beta\|_{\infty}\right) \left\{ \|X_0, Y_0\|_{B_{\infty,1}^0} + \int_0^t \|u\|_{B_{\infty,1}^1} \|b\|_{B_{\infty,1}^1} \right\}.$$

Le cas d'un fluide plan $d = 2$

Introduction des "tourbillons" $(X, Y) = \text{curl}(\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X = \mathcal{L}(\nabla \alpha, \nabla \beta) \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y = \mathcal{L}(\nabla \beta, \nabla \alpha). \end{cases}$$

Dimension $d = 2$, donc $X = \omega + j$ et $Y = \omega - j$ sont scalaires, et $\mathcal{L} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire anti-symétrique.

$$\mathcal{L}(\nabla \alpha, \nabla \beta) = \mathcal{L}(\nabla(u + b), \nabla(u - b)) = 2\mathcal{L}(\nabla b, \nabla u)$$

Estimations linéaires:

$$\|X, Y\|_{B_{\infty,1}^0} \lesssim \left(1 + \int_0^t \|\nabla \alpha, \nabla \beta\|_{\infty}\right) \left\{ \|X_0, Y_0\|_{B_{\infty,1}^0} + \int_0^t \|u\|_{B_{\infty,1}^1} \|b\|_{B_{\infty,1}^1} \right\}.$$

Le cas d'un fluide plan $d = 2$

Introduction des "tourbillons" $(X, Y) = \text{curl}(\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} (\partial_t + \beta \cdot \nabla) X = \mathcal{L}(\nabla \alpha, \nabla \beta) \\ (\partial_t + \alpha \cdot \nabla) Y = \mathcal{L}(\nabla \beta, \nabla \alpha). \end{cases}$$

Dimension $d = 2$, donc $X = \omega + j$ et $Y = \omega - j$ sont scalaires, et $\mathcal{L} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire anti-symétrique.

$$\mathcal{L}(\nabla \alpha, \nabla \beta) = \mathcal{L}(\nabla(u + b), \nabla(u - b)) = 2\mathcal{L}(\nabla b, \nabla u)$$

Estimations linéaires:

$$\|X, Y\|_{B_{\infty,1}^0} \lesssim \left(1 + \int_0^t \|\nabla \alpha, \nabla \beta\|_{\infty}\right) \left\{ \|X_0, Y_0\|_{B_{\infty,1}^0} + \int_0^t \|u\|_{B_{\infty,1}^1} \|b\|_{B_{\infty,1}^1} \right\}.$$

Quand b est faible, les estimations sont presque linéaires.

Le cas d'un fluide plan $d = 2$

Théorème (C., Fanelli, 2020)

Soit $u_0, b_0 \in B_{\infty,1}^2 \cap L^2$. Le temps de vie de la solution associée est au moins

$$T^* \geq \frac{C}{\|(u_0, b_0)\|_{L^2 \cap B_{\infty,1}^2}} \log \left\{ 1 + \log \left[1 + \log \left(1 + C \frac{\|(u_0, b_0)\|_{L^2 \cap B_{\infty,1}^2}}{\|b_0\|_{B_{\infty,1}^1}} \right) \right] \right\}.$$

Le cas d'un fluide plan $d = 2$

Théorème (C., Fanelli, 2020)

Soit $u_0, b_0 \in B_{\infty,1}^2 \cap L^2$. Le temps de vie de la solution associée est au moins

$$T^* \geq \frac{C}{\|(u_0, b_0)\|_{L^2 \cap B_{\infty,1}^2}} \log \left\{ 1 + \log \left[1 + \log \left(1 + C \frac{\|(u_0, b_0)\|_{L^2 \cap B_{\infty,1}^2}}{\|b_0\|_{B_{\infty,1}^1}} \right) \right] \right\}.$$

Théorème (C., Fanelli, 2021)

Soit $u_0 \in B_{\infty,1}^2 \cap L^2$ et $b_0 \in B_{\infty,1}^1 \cap L^2$. Le temps de vie de la solution associée est au moins

$$T^* \geq \frac{C}{\|u_0\|_{L^2 \cap B_{\infty,1}^2}} \log \left\{ 1 + \log \left[1 + \log \left(1 + C \frac{\|u_0\|_{L^2 \cap B_{\infty,1}^2}}{\|b_0\|_{B_{\infty,1}^1}} \right) \right] \right\}.$$

Le cas d'un fluide plan $d = 2$

Théorème (C., Fanelli, 2020)

Soit $u_0, b_0 \in B_{\infty,1}^2 \cap L^2$. Le temps de vie de la solution associée est au moins

$$T^* \geq \frac{C}{\|(u_0, b_0)\|_{L^2 \cap B_{\infty,1}^2}} \log \left\{ 1 + \log \left[1 + \log \left(1 + C \frac{\|(u_0, b_0)\|_{L^2 \cap B_{\infty,1}^2}}{\|b_0\|_{B_{\infty,1}^1}} \right) \right] \right\}.$$

Théorème (C., Fanelli, 2021)

Soit $u_0 \in B_{\infty,1}^2 \cap L^2$ et $b_0 \in B_{\infty,1}^1 \cap L^2$. Le temps de vie de la solution associée est au moins

$$T^* \geq \frac{C}{\|u_0\|_{L^2 \cap B_{\infty,1}^2}} \log \left\{ 1 + \log \left[1 + \log \left(1 + C \frac{\|u_0\|_{L^2 \cap B_{\infty,1}^2}}{\|b_0\|_{B_{\infty,1}^1}} \right) \right] \right\}.$$

Équivalence des systèmes

Variables d'Elsässer:

$$\alpha = u + b \quad \text{and} \quad \beta = u - b.$$

Équivalence des systèmes

Variables d'Elsässer:

$$\alpha = u + b \quad \text{and} \quad \beta = u - b.$$

Alors

$$\exists \pi_1, \pi_2, \quad \begin{cases} \partial_t \alpha + (\beta \cdot \nabla) \alpha + \nabla \pi_1 = 0 \\ \partial_t \beta + (\alpha \cdot \nabla) \beta + \nabla \pi_2 = 0 \\ \operatorname{div}(\alpha) = 0 \\ \operatorname{div}(\beta) = 0. \end{cases}$$

Équivalence des systèmes

Variables d'Elsässer:

$$\alpha = u + b \quad \text{and} \quad \beta = u - b.$$

Alors

$$\exists \pi_1, \pi_2, \quad \begin{cases} \partial_t \alpha + (\beta \cdot \nabla) \alpha + \nabla \pi_1 = 0 \\ \partial_t \beta + (\alpha \cdot \nabla) \beta + \nabla \pi_2 = 0 \\ \operatorname{div}(\alpha) = 0 \\ \operatorname{div}(\beta) = 0. \end{cases}$$

Pour revenir à u et b : $u = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ et $b = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

Théorème (C., Fanelli, 2020)

Soit $1 \leq p < +\infty$ et $(\alpha, \beta) \in C_T^0(L^p \cap L^\infty)$ une solution faible.

Équivalence des systèmes

Variables d'Elsässer:

$$\alpha = u + b \quad \text{and} \quad \beta = u - b.$$

Alors

$$\exists \pi_1, \pi_2, \quad \begin{cases} \partial_t \alpha + (\beta \cdot \nabla) \alpha + \nabla \pi_1 = 0 \\ \partial_t \beta + (\alpha \cdot \nabla) \beta + \nabla \pi_2 = 0 \\ \operatorname{div}(\alpha) = 0 \\ \operatorname{div}(\beta) = 0. \end{cases}$$

Pour revenir à u et b : $u = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ et $b = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

Théorème (C., Fanelli, 2020)

Soit $1 \leq p < +\infty$ et $(\alpha, \beta) \in C_T^0(L^p \cap L^\infty)$ une solution faible. Alors $\pi_1 = \pi_2$.

Équivalence des systèmes

Variables d'Elsässer:

$$\alpha = u + b \quad \text{and} \quad \beta = u - b.$$

Alors

$$\exists \pi_1, \pi_2, \quad \begin{cases} \partial_t \alpha + (\beta \cdot \nabla) \alpha + \nabla \pi_1 = 0 \\ \partial_t \beta + (\alpha \cdot \nabla) \beta + \nabla \pi_2 = 0 \\ \operatorname{div}(\alpha) = 0 \\ \operatorname{div}(\beta) = 0. \end{cases}$$

Pour revenir à u et b : $u = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ et $b = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

Théorème (C., Fanelli, 2020)

Soit $1 \leq p < +\infty$ et $(\alpha, \beta) \in C_T^0(L^p \cap L^\infty)$ une solution faible. Alors $\pi_1 = \pi_2$. Ainsi (u, b) est une solution faible de la MHD idéale.

Équivalence des systèmes

Variables d'Elsässer:

$$\alpha = u + b \quad \text{and} \quad \beta = u - b.$$

Alors

$$\exists \pi_1, \pi_2, \quad \begin{cases} \partial_t \alpha + (\beta \cdot \nabla) \alpha + \nabla \pi_1 = 0 \\ \partial_t \beta + (\alpha \cdot \nabla) \beta + \nabla \pi_2 = 0 \\ \operatorname{div}(\alpha) = 0 \\ \operatorname{div}(\beta) = 0. \end{cases}$$

Pour revenir à u et b : $u = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ et $b = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

Théorème (C., Fanelli, 2020)

Soit $1 \leq p < +\infty$ et $(\alpha, \beta) \in C_T^0(L^p \cap L^\infty)$ une solution faible. Alors $\pi_1 = \pi_2$. Ainsi (u, b) est une solution faible de la MHD idéale.

Question : que dire de $p = +\infty$?

Non-équivalence des systèmes

Variables d'Elsässer :

$$\alpha = u + b \quad \text{et} \quad \beta = u - b.$$

Alors

$$\exists \pi_1, \pi_2, \quad \begin{cases} \partial_t \alpha + (\beta \cdot \nabla) \alpha + \nabla \pi_1 = 0 \\ \partial_t \beta + (\alpha \cdot \nabla) \beta + \nabla \pi_2 = 0 \\ \operatorname{div}(\alpha) = 0 \\ \operatorname{div}(\beta) = 0. \end{cases}$$

Non-équivalence des systèmes

Variables d'Elsässer :

$$\alpha = u + b \quad \text{et} \quad \beta = u - b.$$

Alors

$$\exists \pi_1, \pi_2, \quad \begin{cases} \partial_t \alpha + (\beta \cdot \nabla) \alpha + \nabla \pi_1 = 0 \\ \partial_t \beta + (\alpha \cdot \nabla) \beta + \nabla \pi_2 = 0 \\ \operatorname{div}(\alpha) = 0 \\ \operatorname{div}(\beta) = 0. \end{cases}$$

Contre-exemple :

Non-équivalence des systèmes

Variables d'Elsässer :

$$\alpha = u + b \quad \text{et} \quad \beta = u - b.$$

Alors

$$\exists \pi_1, \pi_2, \quad \begin{cases} \partial_t \alpha + (\beta \cdot \nabla) \alpha + \nabla \pi_1 = 0 \\ \partial_t \beta + (\alpha \cdot \nabla) \beta + \nabla \pi_2 = 0 \\ \operatorname{div}(\alpha) = 0 \\ \operatorname{div}(\beta) = 0. \end{cases}$$

Contre-exemple : $d = 2$,

Non-équivalence des systèmes

Variables d'Elsässer :

$$\alpha = u + b \quad \text{et} \quad \beta = u - b.$$

Alors

$$\exists \pi_1, \pi_2, \quad \begin{cases} \partial_t \alpha + (\beta \cdot \nabla) \alpha + \nabla \pi_1 = 0 \\ \partial_t \beta + (\alpha \cdot \nabla) \beta + \nabla \pi_2 = 0 \\ \operatorname{div}(\alpha) = 0 \\ \operatorname{div}(\beta) = 0. \end{cases}$$

Contre-exemple : $d = 2$,

$$\alpha(t, x) = (f(t), 0) \quad \text{et} \quad \beta(t, x) = -(f(t), 0).$$

Non-équivalence des systèmes

Variables d'Elsässer :

$$\alpha = u + b \quad \text{et} \quad \beta = u - b.$$

Alors

$$\exists \pi_1, \pi_2, \quad \begin{cases} \partial_t \alpha + \nabla \pi_1 = 0 \\ \partial_t \beta + \nabla \pi_2 = 0 \\ \text{div}(\alpha) = 0 \\ \text{div}(\beta) = 0. \end{cases}$$

Contre-exemple : $d = 2$,

$$\alpha(t, x) = (f(t), 0) \quad \text{et} \quad \beta(t, x) = -(f(t), 0).$$

Non-équivalence des systèmes

Variables d'Elsässer :

$$\alpha = u + b \quad \text{et} \quad \beta = u - b.$$

Alors

$$\exists \pi_1, \pi_2, \quad \begin{cases} (f'(t), 0) + \nabla(-x_1 f'(t)) = 0 \\ -(f'(t), 0) + \nabla(x_1 f(t)) = 0 \\ \operatorname{div}(\alpha) = 0 \\ \operatorname{div}(\beta) = 0. \end{cases}$$

Contre-exemple : $d = 2$,

$$\alpha(t, x) = (f(t), 0) \quad \text{et} \quad \beta(t, x) = -(f(t), 0).$$

Non-équivalence des systèmes

Variables d'Elsässer :

$$\alpha = u + b \quad \text{et} \quad \beta = u - b.$$

Alors

$$\exists \pi_1, \pi_2, \quad \begin{cases} (f'(t), 0) + \nabla(-x_1 f'(t)) = 0 \\ -(f'(t), 0) + \nabla(x_1 f(t)) = 0 \\ \operatorname{div}(\alpha) = 0 \\ \operatorname{div}(\beta) = 0. \end{cases}$$

Contre-exemple : $d = 2$,

$$\alpha(t, x) = (f(t), 0) \quad \text{et} \quad \beta(t, x) = -(f(t), 0).$$

L'équation du champ magnétique $b = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ devient

$$\partial_t b + (u \cdot \nabla)b - (b \cdot \nabla)u = \frac{1}{2} \nabla(\pi_2 - \pi_1)$$

Non-équivalence des systèmes

Variables d'Elsässer :

$$\alpha = u + b \quad \text{et} \quad \beta = u - b.$$

Alors

$$\exists \pi_1, \pi_2, \quad \begin{cases} (f'(t), 0) + \nabla(-x_1 f'(t)) = 0 \\ -(f'(t), 0) + \nabla(x_1 f(t)) = 0 \\ \text{div}(\alpha) = 0 \\ \text{div}(\beta) = 0. \end{cases}$$

Contre-exemple : $d = 2$,

$$\alpha(t, x) = (f(t), 0) \quad \text{et} \quad \beta(t, x) = -(f(t), 0).$$

L'équation du champ magnétique $b = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ devient

$$\partial_t b + (u \cdot \nabla)b - (b \cdot \nabla)u = (f'(t), 0) \neq 0.$$

C'est une solution lisse $C^\infty \cap L^\infty$ qui montre que les systèmes ne sont pas équivalents.

Théorème d'équivalence

Dans le cas $p = +\infty$, on établit un théorème d'équivalence optimal.

Théorème d'équivalence

Dans le cas $p = +\infty$, on établit un théorème d'équivalence optimal.

Théorème (C., 2021)

Soit $(\alpha, \beta) \in C^0([0, T[; L^\infty)$ une solution faible du système d'Elsässer et $(u, b) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

Théorème d'équivalence

Dans le cas $p = +\infty$, on établit un théorème d'équivalence optimal.

Théorème (C., 2021)

Soit $(\alpha, \beta) \in C^0([0, T[; L^\infty)$ une solution faible du système d'Elsässer et $(u, b) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- 1 Le couple (u, b) est une solution de la MHD idéale.

Théorème d'équivalence

Dans le cas $p = +\infty$, on établit un théorème d'équivalence optimal.

Théorème (C., 2021)

Soit $(\alpha, \beta) \in C^0([0, T[; L^\infty)$ une solution faible du système d'Elsässer et $(u, b) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- 1 Le couple (u, b) est une solution de la MHD idéale.
- 2 pour tout temps $t \in [0, T[$, la condition $b(t) - b(0) \in S'_h$ est vérifiée.

Théorème d'équivalence

Dans le cas $p = +\infty$, on établit un théorème d'équivalence optimal.

Théorème (C., 2021)

Soit $(\alpha, \beta) \in C^0([0, T[; L^\infty)$ une solution faible du système d'Elsässer et $(u, b) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- 1 Le couple (u, b) est une solution de la MHD idéale.
- 2 pour tout temps $t \in [0, T[$, la condition $b(t) - b(0) \in S'_h$ est vérifiée.

L'espace S'_h contient les distributions tempérées $f \in S'_h$ de transformée de Fourier "petite" autour de $\xi = 0$.

Théorème d'équivalence

Dans le cas $p = +\infty$, on établit un théorème d'équivalence optimal.

Théorème (C., 2021)

Soit $(\alpha, \beta) \in C^0([0, T[; L^\infty)$ une solution faible du système d'Elsässer et $(u, b) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- ① Le couple (u, b) est une solution de la MHD idéale.
- ② pour tout temps $t \in [0, T[$, la condition $b(t) - b(0) \in S'_h$ est vérifiée.

L'espace S'_h contient les distributions tempérées $f \in S'_h$ de transformée de Fourier "petite" autour de $\xi = 0$.

Définition (Chemin)

Fixons une fonction de troncature $\chi \in \mathcal{D}$. On note S'_h l'espace des $f \in S'$ telles que

$$\chi(\lambda\xi)\widehat{f}(\xi) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } \lambda \rightarrow 0^+.$$

Théorème d'équivalence

Dans le cas $p = +\infty$, on établit un théorème d'équivalence optimal.

Théorème (C., 2021)

Soit $(\alpha, \beta) \in C^0([0, T[; L^\infty)$ une solution faible du système d'Elsässer et $(u, b) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- ❶ Le couple (u, b) est une solution de la MHD idéale.
- ❷ pour tout temps $t \in [0, T[$, la condition $b(t) - b(0) \in S'_h$ est vérifiée.

L'espace S'_h contient les distributions tempérées $f \in S'_h$ de transformée de Fourier "petite" autour de $\xi = 0$.

Définition (Chemin)

Fixons une fonction de troncature $\chi \in \mathcal{D}$. On note S'_h l'espace des $f \in S'$ telles que

$$\chi(\lambda\xi)\widehat{f}(\xi) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } \lambda \rightarrow 0^+.$$

Exemples...

Théorème d'équivalence

Dans le cas $p = +\infty$, on établit un théorème d'équivalence optimal.

Théorème (C., 2021)

Soit $(\alpha, \beta) \in C^0([0, T[; L^\infty)$ une solution faible du système d'Elsässer et $(u, b) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- ❶ Le couple (u, b) est une solution de la MHD idéale.
- ❷ pour tout temps $t \in [0, T[$, la condition $b(t) - b(0) \in S'_h$ est vérifiée.

L'espace S'_h contient les distributions tempérées $f \in S'_h$ de transformée de Fourier "petite" autour de $\xi = 0$.

Définition (Chemin)

Fixons une fonction de troncature $\chi \in \mathcal{D}$. On note S'_h l'espace des $f \in S'$ telles que

$$\chi(\lambda\xi)\widehat{f}(\xi) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } \lambda \rightarrow 0^+.$$

Exemples...

- ❶ Fonctions périodiques sans valeur moyenne : $\sin(ax_1) \in S'_h$,

Théorème d'équivalence

Dans le cas $p = +\infty$, on établit un théorème d'équivalence optimal.

Théorème (C., 2021)

Soit $(\alpha, \beta) \in C^0([0, T[; L^\infty)$ une solution faible du système d'Elsässer et $(u, b) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- ❶ Le couple (u, b) est une solution de la MHD idéale.
- ❷ pour tout temps $t \in [0, T[$, la condition $b(t) - b(0) \in S'_h$ est vérifiée.

L'espace S'_h contient les distributions tempérées $f \in S'_h$ de transformée de Fourier "petite" autour de $\xi = 0$.

Définition (Chemin)

Fixons une fonction de troncature $\chi \in \mathcal{D}$. On note S'_h l'espace des $f \in S'$ telles que

$$\chi(\lambda\xi)\widehat{f}(\xi) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } \lambda \rightarrow 0^+.$$

Exemples...

- ❶ Fonctions périodiques sans valeur moyenne : $\sin(ax_1) \in S'_h$,
- ❷ Fonction signe $\sigma = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} - \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-} \in S'_h$.

End of the talk

Merci pour votre attention !