

Reconstructions de flux conservatifs et analyse d'erreur a posteriori pour un problème d'interface discrétisé avec CutFEM

Daniela CAPATINA, Laboratoire de Mathématiques et leurs Applications de Pau - Pau
Aimene GOUASMI, Laboratoire de Mathématiques et leurs Applications de Pau - Pau

L'importance de la reconstruction des flux conservatifs à partir de solutions éléments finis primales d'un problème aux limites est largement reconnue dans la littérature. Une des applications de tels flux est l'analyse d'erreur a posteriori, où la différence entre le flux numérique et le flux reconstruit fournit un indicateur d'erreur fiable, qui peut être ensuite utilisé dans le raffinement adaptatif de maillage.

Nous nous intéressons à la reconstruction locale des flux conservatifs dans l'espace d'éléments finis de Raviart-Thomas RT_h^m pour des problèmes elliptiques d'interface avec des coefficients discontinus. Pour ce faire, notre choix s'est porté sur l'approche introduite dans [1] pour l'équation de Poisson, qui fournit un cadre unifié pour diverses méthodes d'éléments finis et ne nécessite la résolution d'aucun problème mixte. Nous avons d'abord traité, du point de vue théorique et numérique, le cas des maillages qui suivent l'interface dans [3]. Nous avons considéré des approximations par éléments finis conformes mais aussi non-conformes de degré quelconque (cf. [5]) et avons notamment étudié la robustesse de la reconstruction par rapport aux coefficients.

Dans cette présentation, nous considérons un problème de diffusion en présence d'une interface Γ non alignée avec le maillage. Les coefficients de diffusion ainsi que le flux physique sont discontinus à travers Γ . Les conditions de transmission sont traitées à l'aide de la méthode de Nitsche, et la prise en compte numérique de l'interface se fait par la méthode d'éléments finis coupés CutFEM cf. [2].

Dans un premier temps, en suivant [3] nous reconstruisons pour chaque sous-domaine Ω_i un flux σ_i dans l'espace $RT_h^m(\Omega_i)$. Cependant, le flux global défini par restriction ne respecte pas la condition de transmission sur l'interface. Concernant la propriété de conservation sur les éléments coupés, nous avons montré que la divergence de chaque flux σ_i est égale à une extension de la donnée f_i . Pour pallier ces inconvénients, nous reconstruisons dans un deuxième temps un flux dans l'espace *immersed Raviart-Thomas* IRT_h^0 de plus bas degré, introduit récemment dans [4]. Ce nouveau flux est naturellement conservatif et satisfait la condition de saut sur l'interface, mais il n'est que RT^0 par morceaux sur les mailles coupées; en outre, ses traces normales sont faiblement continues à travers les arêtes coupées.

Enfin, nous proposons une autre reconstruction de flux dans l'espace $RT_h^m(\Omega)$, qui est donc globalement $H(\text{div}, \Omega)$ lorsque le saut du flux physique sur l'interface est nul. Nous utilisons ensuite ce flux pour définir un estimateur d'erreur a posteriori et montrons qu'il est robuste, fiable et efficace.

- [1] R. Becker, D. Capatina, R. Luce. *Local flux reconstructions for standard finite element methods on triangular meshes*. SIAM J. Numer. Anal., **54**(4), 2016.
- [2] E. Burman, P. Hansbo. *Fictitious domain finite element methods using cut elements : II. A stabilized Nitsche method*. Appl. Numer. Math., **62**, 2012.
- [3] D. Capatina, A. Gouasmi, C. He. *Robust flux reconstruction and a posteriori error analysis for an elliptic problem with discontinuous coefficients*. J. Sci. Comput., **98**(1), 2024.
- [4] J. Haifeng. *An immersed Raviart-Thomas mixed finite element method for elliptic interface problems on unfitted meshes*. J. Sci. Comput., **91**(2), 2022.
- [5] G. Matthies, L. Tobiska. *Inf-sup stable non-conforming finite elements of arbitrary order on triangles*. Numer. Math., **102**, 2005.