

Étude numérique de l'équation de Lugiato-Lefever pour les résonateurs Fabry-Pérot

Stéphane Balac

stephane.balac@univ-rennes.fr

&

Mouhamad Al-Sayed Ali, Gabriel Caloz, Monique Dauge, Fabrice Mahé

IRMAR, CNRS UMR 6625, Université de Rennes
Campus de Beaulieu, CS 74205, F-35042 Rennes

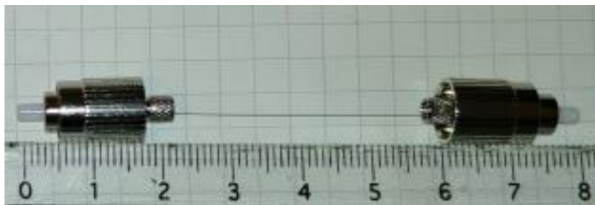
29/05/2024



**Université
de Rennes**

Cadre de l'étude : le projet ANR Rollmops

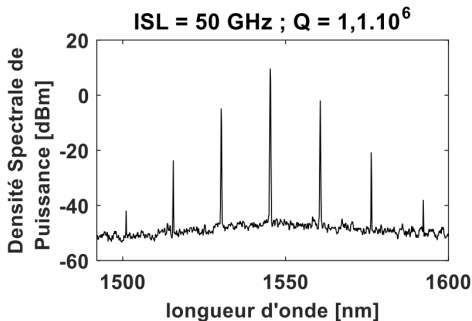
- ▶ Étude de **mini-résonateurs** dits **Fabry-Pérot** formés d'une fibre optique **hautement non linéaires** de qq cm avec aux extrémités des **miroirs de Bragg** (miroirs multi-couches très minces)



- ▶ Dans le cadre de cette étude, on s'intéresse à la **génération de peignes de fréquences** (peignes Kerr)
 - applications en métrologie optique, en spectroscopie moléculaire, pour le multiplexage en longueur d'onde, etc

Peignes de fréquence en optique

- ▶ Les **peignes de fréquence** optiques sont des **sources laser** dont le spectre fréquentiel se compose d'une série discrète de raies équi-espacés.



Spectre généré dans le résonateur HYDEX de 50GHz. Pour un laser de pompe de puissance 29 dBm à une longueur d'onde centrale de 1545 nm.

N. Gutierrez, **Peignes de fréquences optiques par effet Kerr dans les micro et mini résonateurs optiques**, Thèse de doctorat Toulouse 3, 2019

Le modèle LL-FP

Dans un repère temps-espace adapté, le modèle de Lugiato-Lefever pour un FP prend la forme suivante : trouver $\psi(\theta, t)$ t.q.

$\forall \theta \in]-\pi, \pi[\quad \forall t > 0$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(\theta, t) = -i \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}(\theta, t) - (1 + i\alpha) \psi(\theta, t) + F \quad (\text{LL-FP})$$
$$+ i \psi(\theta, t) \left(|\psi(\theta, t)|^2 + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(\zeta, t)|^2 d\zeta}_{\text{terme spécifique F.P.}} \right)$$

où

- ▶ F est l'amplitude du champ pompe (constante) \rightarrow terme de forçage
- ▶ β est le paramètre de dispersion à la vitesse de groupe (GVD)
- ▶ α est le facteur de désaccord (detuning) en fréquence de la pompe

avec les cond. limites périodiques

$$\forall t \in [0, +\infty[\quad \psi(-\pi, t) = \psi(\pi, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(-\pi, t) = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\pi, t)$$

et une condition initiale : $\forall \theta \in [-\pi, \pi] \quad \psi(\theta, 0) = \psi_0(\theta)$

Bibliographie mathématique

L'équation LL (résonateur à modes de galerie = pas de terme intégral) a fait l'objet d'études au cours des 15 dernières années :

- ▶ T. Miyaji, I. Ohnishi, and Y. Tsutsumi, *Bifurcation analysis to the Lugiato–Lefever equation in one space dimension*, **Physica D : Nonlinear Phenomena**, 239 (2010)
- ▶ R. Mandel and W. Reichel, *A priori bounds and global bifurcation results for frequency combs modeled by the Lugiato–Lefever equation*, **SIAM Journal on Applied Mathematics**, 77 (2017)
- ▶ C. Godey, *A bifurcation analysis for the Lugiato–Lefever equation*, **Eur. Phys. J. D**, 71 (2017)
- ▶ L. Delcey and M. Haragus, *Periodic waves of the Lugiato–Lefever equation at the onset of Turing instability*, **Phil. Trans. R. Soc. A.**, 376 (2018)

Un problème bien posé

Soit $V = \{v \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}) ; v(x - \pi) = v(x + \pi) \forall x \in \mathbb{R}\}$.

Pour tout $\psi_0 \in V$, le problème (LL-FP) admet une **unique solution** $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^+, V)$ et

- ▶ $\forall t \in \mathbb{R}^+$ l'application $\psi_0 \mapsto \psi(\cdot, t)$ est continue sur V ;
- ▶ et on a l'**estimation a priori**

$$\|\psi(\cdot, t)\|_{\mathbb{L}^2(-\pi, \pi)}^2 \leq e^{-t} \|\psi_0\|_{\mathbb{L}^2(-\pi, \pi)}^2 + 2\pi F^2 (1 - e^{-t})$$

J.-M. Ghidaglia, *Finite dimensional behavior for weakly damped driven Schrödinger equations*, Annales de l'I.H.P., 5 (1988).

Résolution numérique LL-FP par méthode de Split-Step

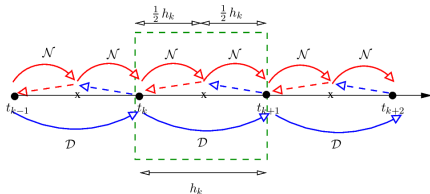
On introduit une subdivision $(t_k)_{k=0,\dots,K}$ en temps et on résout sur chaque pas de temps la succession des 3 pb suivants :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U_k(t) = \mathcal{N}(U_k(t)) & \forall t \in [t_k, t_{k+\frac{1}{2}}] \\ U_k(t_k) = \psi_k \text{ (approx. de } \psi \text{ en } t_k \text{ calculée au pas précédent)} \end{cases} \quad \left(\frac{1}{2}\mathcal{N}\right)$$

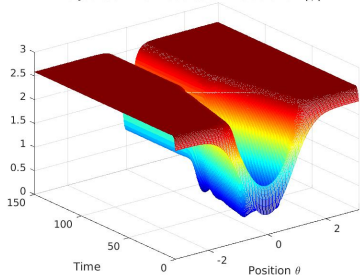
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} V_k(t) = \mathcal{D} V_k(t) & \forall t \in [t_k, t_{k+1}] \\ V_k(t_k) = U_k(t_{k+\frac{1}{2}}) \end{cases} \quad (\mathcal{D})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} W_k(t) = \mathcal{N}(W_k(t)) & \forall t \in [t_{k+\frac{1}{2}}, t_{k+1}] \\ W_k(t_{k+\frac{1}{2}}) = V_k(t_{k+1}) \end{cases} \quad \left(\frac{1}{2}\mathcal{N}\right)$$

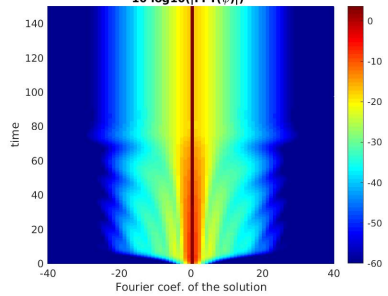
On a pour approx. de la sol. ψ en t_{k+1} : $\psi(t_{k+1}) \approx W_k(t_{k+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_{k+1}$.



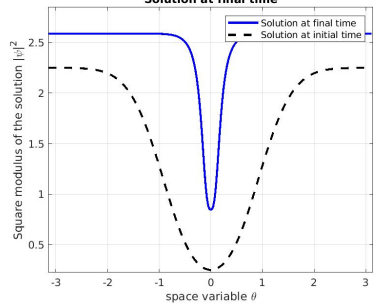
Square of the modulus of the solution $|\psi|^2$



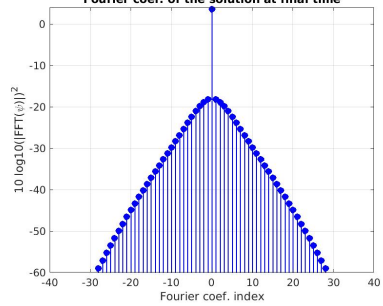
$10 \log_{10}(|\text{FFT}(\psi)|)^2$



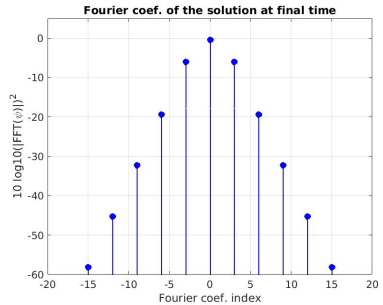
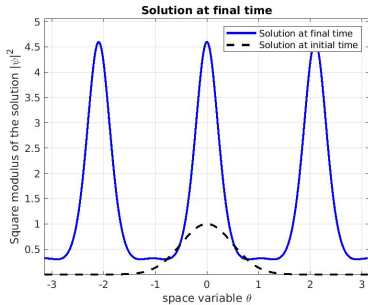
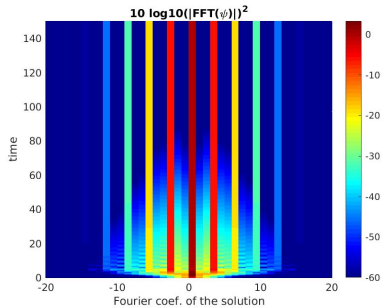
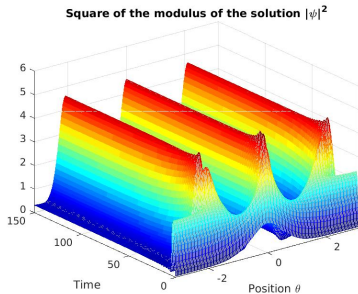
Solution at final time



Fourier coef. of the solution at final time



$\beta = 0.0125$, $\alpha = 2.5$, $F = 1.6155$, $\psi_0(\theta) = 1.5 - \exp(-\theta^2)$ (Dark Soliton)



$\beta = -0.5$, $\alpha = 1.3$, $F = 1.7967$, $\psi_0(\theta) = \exp(-\theta^2)$ (Turing Rolls)

Quelques commentaires

- ▶ Du point de vue de l'application physique, on est intéressé par des solutions stationnaires (cf. peignes de fréquence).
- ▶ Pour la majorité des choix de ψ_0 , on atteint au bout d'un certain temps une solution constante.

Les solutions constantes

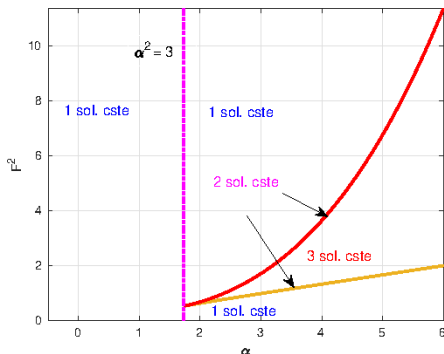
- ▶ Les sol. constantes ψ_{\bullet} peuvent être explicitées :

$$\psi_{\bullet} = \frac{F}{1 + i(\alpha - 3\rho_{\bullet})}$$

où ρ_{\bullet} est une racine positive du polynôme

$$P = 9X^3 - 6\alpha X^2 + (1 + \alpha^2)X - F^2$$

- ▶ On peut déterminer le nombre de solutions constantes selon les valeurs de α et F (indép. de β) :



Le problème LL-FP stationnaire

L'équ. (LL-FP) stationnaire s'écrit sur $] -\pi, \pi[$

$$-i \frac{\beta}{2} \psi''(\theta) - (1 + i\alpha) \psi(\theta) + F + i \psi(\theta) \left(|\psi(\theta)|^2 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(\zeta)|^2 d\zeta \right) = 0 \quad (1)$$

et on a les conditions de périodicité

$$\psi(-\pi) = \psi(\pi) \quad \text{et} \quad \psi'(-\pi) = \psi'(\pi).$$

Un résultat concernant les solutions stationnaires

Théorème

Pour F et β fixés, soit

$$\gamma(F, \beta) = \begin{cases} \frac{648\pi^2}{|\beta|} F^4 & \text{si } \beta < 0 \\ F^2 \left(1 + \frac{72\pi^2}{|\beta|} F^2\right)^2 + \frac{648\pi^2}{|\beta|} F^4 & \text{si } \beta > 0 \end{cases}$$

Si α vérifie l'une des conditions suivantes

- ▶ $\text{sign}(\beta) \alpha \leq -8 F^2 \left(1 + \frac{72\pi^2}{|\beta|} F^2\right)^2$
- ▶ $\text{sign}(\beta) \alpha \geq \gamma(F, \beta) + 2\sqrt{2}F \left(1 + \frac{72\pi^2}{|\beta|} F^2\right)$

alors le problème (LL-FP) n'admet pas d'autres solutions stationnaires que les solutions constantes.

Solutions synchronisées

- ▶ Un cas particulier de solutions du pb (LL-FP) stationnaire correspond aux solutions vérifiant la condition

$$\psi'(-\pi) = \psi'(\pi) = 0.$$

On parle de solutions synchronisées.

- ▶ Question ouverte : toute sol. du pb (LL-FP) stationnaire correspond elle à une sol. synchronisée ?

Discrétisation du problème stationnaire (cas synchronisé)

- ▶ On réécrit l'équ. (1) comme un syst. de 2 équ. à valeurs réelles.
- ▶ On introduit une subd. unif. $(\theta_n)_{n=0,\dots,N}$ de $[-\pi, \pi]$ de pas h .
- ▶ On approche la dérivée seconde par une différence finie centrée d'ordre 2 et l'intégrale par la formule des trapèzes (super-cv!).

On est amené à chercher $U \in \mathbb{R}^{2N+2}$ sol. du **syst. non-linéaire**

$$G(U) \stackrel{\text{def}}{=} M U + \mathcal{N}(U) = 0 \quad (2)$$

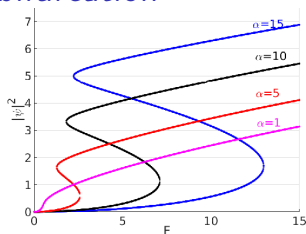
$$\text{où } M = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2h^2} A - \alpha I_{N+1} & -I_{N+1} \\ I_{N+1} & \frac{\beta}{2h^2} A - \alpha I_{N+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2N+2}(\mathbb{R})$$

$A \in \mathcal{M}_{2N+2}(\mathbb{R})$ matrice DF Laplacien-Neumann
et $\mathcal{N}(U)$ la discrétisation de la partie non-linéaire.

- ▶ On résout le système non-linéaire (2) par un **solveur Newton**.
- ▶ Se pose la quest. de l'**initialisation** pour le solveur Newton pour calculer autre chose qu'une sol. constante.

Étude des solutions stationnaires par bifurcation

- ▶ On choisit un param. de bifurcation λ (par ex. F) et pour β, α fixés, on s'intéresse à la courbe \mathcal{C} des sol. constantes lorsque λ varie.



- ▶ Le **thm des Fonctions Implicites** indique qu'en un point $(U_\bullet, \lambda) \in \mathcal{C}$ où $\partial_U G(U_\bullet, \lambda)$ est **non singulier**, dans un voisinage de (U_\bullet, λ) la courbe des solutions constantes est la seule.
- ▶ La cond. de singularité de $\partial_U G(U_\bullet, \lambda)$ permet de montrer que les points de bifurcation (U_\bullet, λ) sont donnés par la condition

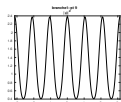
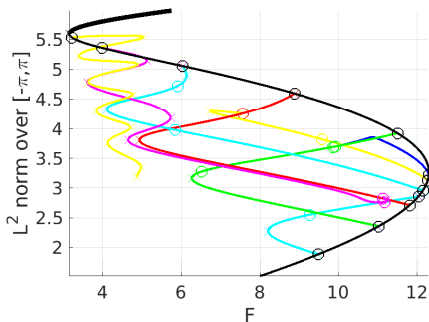
$$\exists k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{\beta} \left(\alpha - 4\rho_\bullet \pm \sqrt{\rho_\bullet^2 - 1} \right) = \frac{k^2}{2}.$$

- ▶ Le **thm de Crandall-Rabinowitz** permet de montrer que dans la situation considérée, aux pts de bifurcation il existe une seule autre courbe en plus de la courbe des sol. constantes.

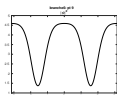
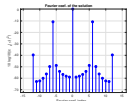
Illustration

On utilise une **méthode de continuation** pour tracer les courbes bifurquant de la courbe des solutions constantes. Implémentation à l'aide du code `pde2path` (www.staff.uni-oldenburg.de/hannes.uecker/pde2path)

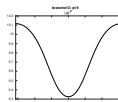
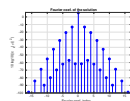
$$\beta = 0.4, \alpha = 10$$



Branche 1



Branche 6



Branche 12

