Approximation d'un contrôle exact frontière pour une équation des ondes semi-linéaire unidimensionnelle avec des conditions aux limites mixtes

Sue CLARET, Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal - Clermont-Ferrand

Soient $\Omega := (0,1)$, $T > 0$ et $Q_T := \Omega \times (0,T)$. On note $H^1_{(0)}(\Omega) := \{f \in H^1(\Omega);\ f(0)=0\}$. On considère l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et les sous-ensembles fermés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_0$ suivants :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} := \Big\{&(y,v) \in L^2(Q_T)\times L^2(0,T);\ y \in \mathcal{C}^0\left([0,T];H^1_{(0)}(\Omega)\right)\cap \mathcal{C}^1\left([0,T];L^2(\Omega)\right),\\ &y(0,\cdot)=0,\ \partial_x y(1,\cdot)=v,\ \partial_{tt}y-\partial_{xx}y \in L^2(Q_T)\Big\},\\ \mathcal{A} := \Big\{&(y,v)\in\mathcal{H};\ (y(\cdot,0),\partial_t y(\cdot,0))=(u_0,u_1),\ (y(\cdot,T),\partial_t y(\cdot,T))=(z_0,z_1)\Big\},\\ \mathcal{A}_0 := \Big\{&(y,v)\in\mathcal{H};\ (y(\cdot,0),\partial_t y(\cdot,0))=(0,0),\ (y(\cdot,T),\partial_t y(\cdot,T))=(0,0)\Big\}.\end{aligned}$$

Dans cet exposé, pour tous $(u_0,u_1),(z_0,z_1)\in H^1_{(0)}(\Omega)\times L^2(\Omega)$, on construit, en adaptant [1], une suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un contrôle $v\in L^2(0,T)$ pour l'équation des ondes semi-linéaire

$$\begin{cases}\partial_{tt}y-\partial_{xx}y+f(y)=0 & Q_T,\\ y(0,t)=0,\quad \partial_x y(1,t)=v(t) & (0,T),\\ (y(\cdot,0),\partial_t y(\cdot,0))=(u_0,u_1) & \Omega,\end{cases}\tag{1}$$

tel que $(y(\cdot,T),\partial_t y(\cdot,T))=(z_0,z_1)$. Le résultat principal est donnée par le Théorème 1 :

Théorème 1. *On suppose que $T>2$. On considère une fonction $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que f' est une fonction α-Hölderienne pour un certain $\alpha\in[0,1]$ satisfaisant $\limsup_{|x|\to+\infty}\frac{|f'(x)|}{\ln^2|x|}<\beta$ avec $\beta>0$ suffisamment petit. Soit $(y_k,v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $(y_0,v_0)\in\mathcal{A}$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$*

$$(y_{k+1},v_{k+1})=(y_k,v_k)-\lambda_k(Y^1_k,V^1_k),\qquad \lambda_k=argmin_{\lambda\in[0,1]}E\left((y_k,v_k)-\lambda(Y^1_k,V^1_k)\right)$$

où $E(y,v)=\|\partial_{tt}y-\partial_{xx}y+f(y)\|^2_{L^2(Q_T)}$ pour tous $(y,v)\in\mathcal{A}$ et $(Y^1_k,V^1_k)\in\mathcal{A}_0$ minimise la fonctionnelle $\mathcal{J}(y,v)=\frac12\|y\|^2_{L^2(Q_T)}+\frac12\|v\|^2_{L^2(0,T)}$ sur toutes les paires état-contrôle pour

$$\begin{cases}\partial_{tt}Y^1_k-\partial_{xx}Y^1_k+f'(y_k)Y^1_k=\partial_{tt}y_k-\partial_{xx}y_k+f(y_k), & Q_T,\\ Y^1_k(0,t)=0,\ \partial_x Y^1_k(1,t)=V^1_k & (0,T).\end{cases}$$

Alors $(y_k,v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers une paire état-contrôle pour (1) avec une convergence au moins linéaire, puis au moins d'ordre $1+\alpha$ après un nombre fini d'itérations.

En particulier, on présentera quelques éléments de la preuve basée sur l'obtention d'une inégalité d'observabilité pour une équation des ondes linéaire obtenue en adaptant [2] puis des simulations numériques seront commentées pour illustrer le résultat.

[1] A. Münch, E. Trélat. *Constructive exact control of semilinear 1d wave equations by a least-squares approach.* SIAM Journal on Control and Optimization, **60(2)**, 652–673, 2022. doi : 10.1137/20M1380661.

[2] E. Zuazua. *Exact controllability for semilinear wave equations in one space dimension.* In *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, vol. 10, pp. 109–129. Elsevier, 1993.

Contact : `sue.claret@uca.fr`