Analyse d'un schéma HMM à un pas pour les systèmes d'EDS lents-rapides

Charles-Édouard BRÉHIER, LMAP - Pau

Ludovic GOUDENÈGE, Fédération Mathématique de CentraleSupelec - Gif-sur-Yvette
Jules PERTINAND, TUM - Munich

On cherche à approcher la loi du système d'EDS lent-rapide suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \mathrm{d}X_t^\varepsilon & = & f(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}t + g(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}B_t & \text{dans } \mathbb{R}^d \\ \mathrm{d}Y_t^\varepsilon & = & b(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}W_t & \text{dans } \mathbb{R}^d \end{array} \right. . \tag{1}$$

Sous de bonnes hypothèses d'ergodicité sur la composante rapide Y^ε, la séparation des échelles de temps conduit à la *moyennisation* de la composante lente, i.e.

$$\forall t > 0,\ X_t^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{loi}} \overline{X}_t$$

où $\overline{X}$ suit l'EDS

$$\mathrm{d}\overline{X}_t = \overline{f}(\overline{X}_t)\,\mathrm{d}t + \overline{g}(\overline{X}_t)\,\mathrm{d}\overline{B}_t$$

voir [2].
Bien qu'on dispose d'une formule explicite pour $\overline{f}$ et $\overline{g}$, celles-ci sont coûteuses à évaluer en pratique. L'approche classique est alors de recourir à un schéma dit Heterogeneous Multiscale Methods (HMM), voir [1], qui combinent intelligemment la discrétisation de la dynamique et l'approximation de $\overline{f}, \overline{g}$. Ici, on propose le schéma HMM à un pas suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcc} X_{n+1}^\tau & = & X_n^\tau + \Delta t f(X_n^\tau, Y_{n+1}^\tau) + \Delta t^{\frac{1}{2}} g(X_n^\tau, Y_{n+1}^\tau)\Gamma_{n+1} \\ Y_{n+1}^\tau & = & \phi(X_n^\tau, Y_n^\tau, \tau, \gamma_{n+1}) \end{array} \right. \tag{2}$$

pour $\Delta t > 0$, $\tau = \sqrt{\Delta t}$ et où ϕ définit un schéma ergodique consistant pour Y.
Sous de bonnes hypothèses d'ergodicité sur la dynamique rapide et sa discrétisation, on montre que, malgré la simplicité du schéma, l'approximation n'est pas dégradée par rapport à un schéma HMM standard : pour un temps final $T > 0$, un nombre de pas $N := \frac{T}{\Delta t}$ et une fonction test φ, on a un contrôle explicite de l'erreur faible

$$\left|\mathbb{E}\left[\varphi(X_T^\varepsilon)\right] - \mathbb{E}\left[\varphi(X_N^\tau)\right]\right| \lesssim \sqrt{\Delta t} + \varepsilon$$

pour un coût de calcul $O(\frac{1}{\Delta t})$.

[1] W. E, D. Liu, E. Vanden-Eijnden. *Analysis of multiscale methods for stochastic differential equations.* Commun. Pure Appl. Math., **58(11)**, 1544–1585, 2005. doi :10.1002/cpa.20088.

[2] R. Z. Hashminskiĭ. *On the principle of averaging the Itô's stochastic differential equations.* Kybernetika (Prague), **4**, 260–279.

Contact : `jules.pertinand@tum.de`