Synthèse optimale de portes logiques quantiques par homotopie.

Emmanuel FRANCK, INRIA - Strasbourg **Killian LUTZ**, INRIA - Strasbourg
Yannick PRIVAT, IECL - Nancy

Modélisation : synthèse de porte logique. En informatique quantique [2], l'information peut en principe et par exemple être encodée via les $d = 4$ niveaux d'énergie d'une molécule TbPc2. Chaque niveau d'énergie est associé à une valeur logique : $0, 1, 2$ et 3. Au cours d'une expérience, la répartition probabiliste $x(t)$ de la molécule parmi ces quatre états peut être modifiée en soumettant pendant une durée T le système à des impulsions électromagnétiques de fréquences fixées $u(t)$ d'amplitudes variables. Exécuter une porte logique quantique Q c'est donc appliquer un **protocole** expérimental (T, u) modifiant la distribution initiale $x(0)$ en $Qx(0)$ à l'instant T : $x(T) = Qx(0)$. Il est crucial de modéliser les **intéractions** de la molécule avec son environnement et d'agir rapidement -mais précisément- pour limiter les perturbations associées, sources d'erreurs de calcul. L'équation différentielle linéaire considérée est dite de **GKS-Lindblad** d'inconnue $x : [0, T] \to M_d(\mathbf{C})$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\mathcal{L}x}_{\text{Environnement}} + \sum_{j=1}^{2(d-1)} \underbrace{-\,\mathrm{i}\,u_j(t)(H_j x - xH_j)}_{\text{Contrôle}}, \quad 0 < t < T. \tag{1}$$

Problème de contrôle optimal bilinéaire. Fixons l'amplitude maximale $u_{\max} > 0$ et $Q \in U(d^2)$ une matrice unitaire. Notons $R_u(T) \in M_{d^2}(\mathbf{C})$ la résolvante de l'équation (1) évaluée au temps T pour le choix de contrôle u. C'est une approximation de la porte d'intérêt Q qui, en général, ne peut *pas* être atteinte [1]. L'objectif est alors de minimiser la distance euclidienne

$$\inf_{(T,u)\in\mathcal{A}} J_0(T, u) = |R_u(T) - Q|, \tag{$\mathcal{P}_0$}$$

parmi les couples $(T, u) \in \mathbf{R}_+ \times L^\infty(0, T; \mathbf{R}^{2(d-1)})$ tels que $\max_j |u_j(t)| \leq u_{\max}$ en presque tout temps.

Contributions et sujets de discussion. Les travaux que nous présenterons mettent en évidence l'existence d'un **temps minimal** de contrôle T_0 et des estimations **explicites** sur la rapidité et la précision de la synthèse. Un algorithme numérique d'**homotopie** [3] est construit pour approcher un minimiseur temps-optimal (T_0, u_0) solution de $(\mathcal{P}_0)$. Considérons la famille de problème

$$\inf_{(T,u)\in\mathcal{A}} J_\eta(T, u) = \eta T + (1-\eta)|R_u(T) - Q|. \tag{$\mathcal{P}_\eta$}$$

L'idée est de déformer les minimiseurs de ces *plus simples* problèmes $(\mathcal{P}_\eta)_{\eta\in]0,1]}$ en la paire (T_0, u_0). En pratique, on fixe une subdivision $(\eta_i)_{0\leq i\leq n-1}$ de l'intervalle $[0, 1]$ puis résout séquentiellement les problèmes $(\mathcal{P}_{\eta_i})$ par descente de gradient initialisée avec l'estimation $(\hat{T}_{i+1}, \hat{u}_{i+1})$ d'un minimiseur du problème précedent $(\mathcal{P}_{\eta_{i+1}})$. Si le choix de subdivision est adéquat, alors pour $\eta_0 = 0$ le n-ième résultat $(\hat{T}_0, \hat{u}_0)$ est une "bonne" approximation de (T_0, u_0).

[1] G. Dirr, U. Helmke. *Lie theory for quantum control.* GAMM-Mitteilungen, **31(1)**, 59–93, 2008.

[2] M. A. Nielsen, I. L. Chuang. *Quantum computation and quantum information.* Cambridge university press, 2010.

[3] E. Trélat. *Optimal control and applications to aerospace : some results and challenges.* Journal of Optimization Theory and Applications, **154**, 713–758, 2012.

Contact : `killian.lutz@inria.fr`