Sur la régularité des fractures fragiles en élasticité linéaire

Camille Labourie (collaboration avec Antoine Lemenant)

28 mai 2024

Université Paris-Saclay

La fonctionnelle de Griffith

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un ouvert borné. On minimise

$$\underbrace{\int_{\Omega\setminus K} \mathbf{C}e(u) : e(u)\,\mathrm{d}x}_{\text{énergie élastique}} + \underbrace{\mathcal{H}^{N-1}(K)}_{\text{aire de la fracture}}, \quad \text{où} \quad e(u) := \frac{\nabla u + \nabla u^T}{2},$$

parmi les paires (u, K) où $K \subset \Omega$ (*fracture*) est un fermé de dimension $N-1$ et $u : \Omega \setminus K \to \mathbf{R}^N$ (*champ de déplacement*) est une fonction lisse avec une condition de Dirichlet au bord $\partial\Omega$.

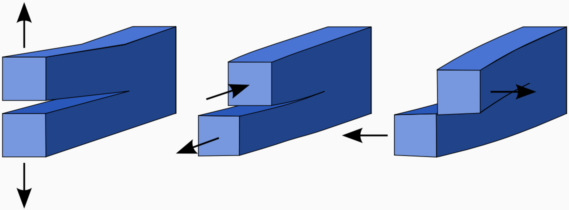


Figure 1 : Ouverture, cisaillement plan, cisaillement anti-plan

Comparaison avec la fonctionnelle de Mumford-Shah

Étant donné $g \in L^\infty(\Omega)$, la fonctionnelle de Mumford-Shah est

$$\int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \mathcal{H}^{N-1}(K) + \int_\Omega |u - g|^2 \,\mathrm{d}x$$

où $K \subset \Omega$ (*segmentation*) et $u : \Omega \setminus K \to \mathbf{R}$ (*approximation lisse par morceaux*).

Comparaison avec la fonctionnelle de Mumford-Shah

Étant donné $g \in L^\infty(\Omega)$, la fonctionnelle de Mumford-Shah est

$$\int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \mathcal{H}^{N-1}(K) + \int_\Omega |u - g|^2 \,\mathrm{d}x$$

où $K \subset \Omega$ (*segmentation*) et $u : \Omega \setminus K \to \mathbf{R}$ (*approximation lisse par morceaux*).

La fonctionnelle de Griffith pose plusieurs difficultés

1. Pas de contrôle sur toutes les dérivées $\int_{B(x,r)\setminus K} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x$.
2. Pas de contrôle sur les variations internes $(u \circ \phi^{-1}, \phi(K))$, où ϕ est un difféomorphisme.
3. Pas de principe du maximum.
4. Pas d'analogue de la formule de la co-aire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{N-1}((B(x,r) \setminus K) \cap \{\, u = t \,\}) \,\mathrm{d}t = \int_{B(x,r)\setminus K} |\nabla u| \,\mathrm{d}x\,.$$

Historique

- A. Griffith. **The phenomena of rupture and flow in solids**. Philos. Trans. R. Soc. London (1921).
- G. Francfort and J. J. Marigo. **Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem**. J. Mech. Phys. Solids (1998).
- G. Dal Maso. **Generalized functions of bounded deformation**. JEMS (2013).
- A. Chambolle and V. Crismale. **Compactness and lower semicontinuity in *GSBD***. JEMS (2021).
- A. Chambolle and V. Crismale. **Existence of strong solutions to the Dirichlet problem for the Griffith energy**. Calc. Var. PDE (2019).
- M. Friedrich, C. Labourie, K. Stinson. **On regularity for Griffith almost-minimizers in the plane.** Preprint (2023).

Definition
Une paire (u, K) est un minimiseur local de Griffith dans Ω si pour toute boule ouvert $B \subset\subset \Omega$ et pour toute paire (v, L) avec

$$L \setminus B = K \setminus B \quad \text{et} \quad v = u \text{ dans } \Omega \setminus (B \cup K),$$

on a

$$\int_{B\setminus K} \mathbf{C}e(u) : e(u)\,\mathrm{d}x + \mathcal{H}^{N-1}(K \cap B) \leq \int_{B\setminus K} \mathbf{C}e(v) : e(v)\,\mathrm{d}x + \mathcal{H}^{N-1}(L \cap B).$$

EDP associée à des variations externes

Soit (u, K) un minimiseur local de Griffith dans Ω. En comparant (u, K) et

$$(u + \varepsilon\varphi, K), \quad \text{où } \varphi \in C_c^1(\Omega; \mathbf{R}^N),$$

on trouve que dans toute composante connexe V de $\Omega \setminus K$, la fonction u est solution faible de

$$\begin{cases} \operatorname{div}(e(u)) = 0 & \text{dans } V \\ e(u)\nu = 0 & \text{le long } \Omega \cap \partial V, \end{cases}$$

où ν est un champ de vecteurs normal à ∂V.

EDP associée à des variations externes

Soit (u, K) un minimiseur local de Griffith dans Ω. En comparant (u, K) et

$$(u + \varepsilon\varphi, K), \quad \text{où } \varphi \in C^1_c(\Omega; \mathbf{R}^N),$$

on trouve que dans toute composante connexe V de $\Omega \setminus K$, la fonction u est solution faible de

$$\begin{cases} \mathrm{div}(e(u)) = 0 & \text{dans } V \\ e(u)\nu = 0 & \text{le long } \Omega \cap \partial V, \end{cases}$$

où ν est un champ de vecteurs normal à ∂V.

La régularité de K détermine la régularité de u au bord.

Ahlfors-régularité (Conti, Focardi, Iurlano, Chambolle)

Soit (u, K) un minimiseur local de Griffith dans Ω. Pour toute boule $B(x, r) \subset \Omega$ avec $x \in K$,

$$\mathcal{H}^{N-1}(K \cap B(x, r)) + \int_{B(x,r)} |e(u)|^2 \,\mathrm{d}x \leq C r^{N-1}$$

$$\mathcal{H}^{N-1}(K \cap B(x, r)) \geq C^{-1} r^{N-1}.$$

Homogénéité du problème

Ahlfors-régularité (Conti, Focardi, Iurlano, Chambolle)

Soit (u, K) un minimiseur local de Griffith dans Ω. Pour toute boule $B(x, r) \subset \Omega$ avec $x \in K$,

$$\mathcal{H}^{N-1}(K \cap B(x, r)) + \int_{B(x,r)} |e(u)|^2 \, \mathrm{d}x \leq C r^{N-1}$$

$$\mathcal{H}^{N-1}(K \cap B(x, r)) \geq C^{-1} r^{N-1}.$$

Remise à échelle

Si (u, K) est un minimiseur local dans $B(x_0, r_0)$, alors

$$\left(\frac{u(x_0 + r_0 \cdot)}{\sqrt{r_0}}, \frac{K - x_0}{r_0} \right) \text{ est un minimiseur local dans } B(0, 1).$$

Homogénéité du problème

Ahlfors-régularité (Conti, Focardi, Iurlano, Chambolle)

Soit (u, K) un minimiseur local de Griffith dans Ω. Pour toute boule $B(x, r) \subset \Omega$ avec $x \in K$,

$$\mathcal{H}^{N-1}(K \cap B(x, r)) + \int_{B(x,r)} |e(u)|^2 \, \mathrm{d}x \leq C r^{N-1}$$

$$\mathcal{H}^{N-1}(K \cap B(x, r)) \geq C^{-1} r^{N-1}.$$

Remise à échelle

Si (u, K) est un minimiseur local dans $B(x_0, r_0)$, alors

$$\left(\frac{u(x_0 + r_0 \cdot)}{\sqrt{r_0}}, \frac{K - x_0}{r_0} \right) \text{ est un minimiseur local dans } B(0, 1).$$

Énergie élastique normalisée

$$\omega(x_0, r_0) := r_0^{1-N} \left(\int_{B(x_0, r_0) \setminus K} |e(u)|^2 \, \mathrm{d}x \right).$$

Homogénéité du problème

Ahlfors-régularité (Conti, Focardi, Iurlano, Chambolle)

Soit (u, K) un minimiseur local de Griffith dans Ω. Pour toute boule $B(x, r) \subset \Omega$ avec $x \in K$,

$$\mathcal{H}^{N-1}(K \cap B(x, r)) + \int_{B(x,r)} |e(u)|^2 \, \mathrm{d}x \leq C r^{N-1}$$

$$\mathcal{H}^{N-1}(K \cap B(x, r)) \geq C^{-1} r^{N-1}.$$

Remise à échelle

Si (u, K) est un minimiseur local dans $B(x_0, r_0)$, alors

$$\left(\frac{u(x_0 + r_0 \cdot)}{\sqrt{r_0}}, \frac{K - x_0}{r_0} \right) \text{ est un minimiseur local dans } B(0, 1).$$

p-Énergie élastique normalisée

$$\omega_p(x_0, r_0) := r_0^{1-2N/p} \left(\int_{B(x_0,r_0) \setminus K} |e(u)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{p}}.$$

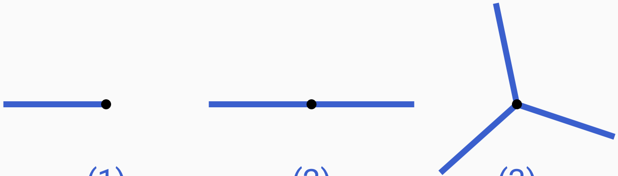
Limites blow-up

Theorem (L.-Lemenant)
Soit (u, K) un minimiseur de Griffith local dans $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ tel que $0 \in K$. A limite blow-up en 0 est une limite de la forme

$$(u_\infty, K_\infty) = \lim_{i \to +\infty} \left(\frac{u(r_i \, \cdot)}{\sqrt{r_i}}, \frac{K}{r_i} \right), \quad \text{où} \quad \lim_{i \to +\infty} r_i = 0.$$

Alors (u_∞, K_∞) est un minimiseur global de Griffith dans $\mathbf{R}^N$ et si K_∞ est un cône dans $\mathbf{R}^2$, alors

$$K_\infty =$$



(1) (2) (3)

Limites de paires

Soit (u_i, K_i) une suite de paires dans $\Omega_i \to \Omega$.

Definition
On dit que $(u_i, K_i)_i \to (u, K)$ *si*

1. $(K_i)_i \to K$ *en distance de Hausdorff locale ;*
2. *pour toute composante connexe* $\mathcal{O}$ *de* $\Omega \setminus K$, *il existe une suite de mouvements rigides* $(a_i)_i$ *telle que pour tout compact* $H \subset \mathcal{O}$,

$$\lim_{i \to +\infty} \int_H |u_i - a_i - u|^2 \, \mathrm{d}x = 0.$$

Propriété de ce mode de convergence

Soit (u_i, K_i) une suite de paires dans $\Omega_i \to \Omega$.

Compacité

$$\text{Si} \quad \limsup_{i \to +\infty} \int_H |e(u_i)|^2 < +\infty \quad \text{pour tout compact } H \subset \Omega$$

alors (u_i, K_i) a une sous-suite convergence $(u_j, K_j) \to (u, K)$.

Propriété de ce mode de convergence

Soit (u_i, K_i) une suite de paires dans $\Omega_i \to \Omega$.

Compacité

$$\text{Si} \quad \limsup_{i\to+\infty} \int_H |e(u_i)|^2 < +\infty \quad \text{pour tout compact } H \subset \Omega$$

alors (u_i, K_i) a une sous-suite convergence $(u_j, K_j) \to (u, K)$.

Semi-continuité inférieure

Si $(u_i, K_i)_i \to (u, K)$, alors pour tout ouvert $V \subset \Omega$ et $p \in [1, \infty)$,

$$\int_{V\setminus K} [\mathbf{C}e(u) : e(u)]^{p/2} \, \mathrm{d}x \leq \liminf_{i\to+\infty} \int_{\Omega_i \cap V \setminus K_i} [\mathbf{C}e(u) : e(u)]^{p/2} \, \mathrm{d}x.$$

mais a-t-on

$$\mathcal{H}^{N-1}(K \cap V) \leq \liminf_{i\to+\infty} \mathcal{H}^{N-1}(K_i \cap V) \quad ?$$

Propriété d'uniforme concentration

Pour tout $\varepsilon_0 \in (0,1)$, il existe $C_0 = C_0(\varepsilon_0) \geq 1$ telle que...

Theorem (L.-Lemenant)
Soit (u,K) un minimiseur local de Griffith. Pour toute boule $B(x,r)$ avec $x \in K$, il existe $B(y,t) \subset B(x,r)$ avec $y \in K$ et $t \geq C_0^{-1} r$ tel que

$$\mathcal{H}^{N-1}(K \cap B(y,t)) \geq (1-\varepsilon_0)\omega_{N-1} t^{N-1},$$

où ω_{N-1} est l'aire du disque unité de dimension $(N-1)$.

Propriété d'uniforme concentration

Pour tout $\varepsilon_0 \in (0,1)$, il existe $C_0 = C_0(\varepsilon_0) \geq 1$ telle que...

Theorem (L.-Lemenant)
Soit (u, K) un minimiseur local de Griffith. Pour toute boule $B(x, r)$ avec $x \in K$, il existe $B(y, t) \subset B(x, r)$ avec $y \in K$ et $t \geq C_0^{-1} r$ tel que

$$\mathcal{H}^{N-1}(K \cap B(y, t)) \geq (1 - \varepsilon_0)\omega_{N-1} t^{N-1},$$

où ω_{N-1} est l'aire du disque unité de dimension $(N-1)$.

Si $K_i \to K$ a la propriété d'uniforme concentration,
alors $\mathcal{H}^{N-1}$ semi-continue inférieure (DalMaso, Morel, Solimini).

Propriété d'uniforme concentration

Pour tout $\varepsilon_0 \in (0,1)$, il existe $C_0 = C_0(\varepsilon_0) \geq 1$ telle que...

Theorem (L.-Lemenant)
Soit (u, K) un minimiseur local de Griffith. Pour toute boule $B(x, r)$ avec $x \in K$, il existe $B(y, t) \subset B(x, r)$ avec $y \in K$ et $t \geq C_0^{-1} r$ tel que

$$\mathcal{H}^{N-1}(K \cap B(y, t)) \geq (1 - \varepsilon_0)\omega_{N-1} t^{N-1},$$

où ω_{N-1} est l'aire du disque unité de dimension $(N-1)$.

Si $K_i \to K$ a la propriété d'uniforme concentration,
alors $\mathcal{H}^{N-1}$ semi-continue inférieure (DalMaso, Morel, Solimini).

Les preuves connues pour Mumford-Shah
ne s'adaptent pas à Griffith...

Estimées de Carleson. Soit $p \in [1,2)$.

En moyenne pour les boules $B(y,t)$ avec $y \in K \cap B(x,r)$ et $t \in (0,r)$,

la p-énergie élastique normalisée $\omega_p(y,t)$ est petite,

où

$$\omega_p(y,t) := t^{1-2N/p} \left(\int_{B(y,t)\setminus K} |e(u)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{p}}.$$

Résumé de la preuve : I) Estimées de type Carleson

Estimées de Carleson. Soit $p \in [1,2)$.

$$\int_{y \in K \cap B(x,r)} \int_0^r \omega_p(y,t) \frac{\mathrm{d}t}{t} \,\mathrm{d}\mathcal{H}^1(y) \leq C r^{N-1},$$

où

$$\omega_p(y,t) := t^{1-2N/p} \left(\int_{B(y,t) \setminus K} |e(u)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{p}}.$$

Résumé de la preuve : I) Estimées de type Carleson

Estimées de Carleson. Soit $p \in [1, 2)$.

$$\int_{y \in K \cap B(x,r)} \int_0^r \omega_p(y,t) \frac{\mathrm{d}t}{t} \,\mathrm{d}\mathcal{H}^1(y) \leq C r^{N-1},$$

où

$$\omega_p(y,t) := t^{1-2N/p} \left(\int_{B(y,t) \setminus K} |e(u)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{p}}.$$

Consequence : pour tout $\varepsilon_0 > 0$, il existe $C_0 = C_0(\varepsilon_0) \geq 1$ telle que

$$\exists y \in K \cap B(x,r) \text{ et } t \in (C_0^{-1} r_0, r_0) \text{ satisfaisant}$$

$$\omega_p(y,t) \leq \varepsilon_0,$$

Résumé de la preuve : II) lien avec les films de savon

Idée : en régime de petite énergie élastique, la fracture se comporte comme un ensemble minimal (film de savon) et donc a une densité $\gtrsim 1$.

Résumé de la preuve : II) lien avec les films de savon

Idée : en régime de petite énergie élastique, la fracture se comporte comme un ensemble minimal (film de savon) et donc a une densité $\gtrsim 1$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\varepsilon) > 0$ tel que...

Lemma
Soit (u, K) un minimiseur local de Griffith. Pour toute boule $B(x, r)$ avec $x \in K$, si

$$\omega_p(x, r) \leq \varepsilon_0,$$

then

$$\mathcal{H}^{N-1}(K \cap B(x, r)) \geq (1 - \varepsilon)\omega_{N-1} r^{N-1},$$

où ω_{N-1} est l'aire du disque unité de dimension $N - 1$.

Résumé de la preuve : II) lien avec les films de savon

- On procède par contradiction : disons que (u_i, K_i) est une suite dans $B(0,1)$ telle que

$$\omega^i(0,1) := \int_{B(0,1)} |e(u_i)|^p \,\mathrm{d}x \to 0$$

mais

$$\mathcal{H}^{N-1}(K_i) \leq (1-\varepsilon)\omega_{N-1}.$$

Résumé de la preuve : II) lien avec les films de savon

- On procède par contradiction : disons que (u_i, K_i) est une suite dans $B(0,1)$ telle que

$$\omega^i(0,1) := \int_{B(0,1)} |e(u_i)|^p \,\mathrm{d}x \to 0$$

mais

$$\mathcal{H}^{N-1}(K_i) \leq (1-\varepsilon)\omega_{N-1}.$$

- Extraire $(u_i, K_i) \to (u, K)$ et $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner K_i \rightharpoonup \mu$.

Résumé de la preuve : II) lien avec les films de savon

- On procède par contradiction : disons que (u_i, K_i) est une suite dans $B(0,1)$ telle que

$$\omega^i(0,1) := \int_{B(0,1)} |e(u_i)|^p \,\mathrm{d}x \to 0$$

mais

$$\mathcal{H}^{N-1}(K_i) \leq (1-\varepsilon)\omega_{N-1}.$$

- Extraire $(u_i, K_i) \to (u, K)$ et $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner K_i \rightharpoonup \mu$.
- **But : montrer que $\mu \geq \mathcal{H}^{N-1} \llcorner K$ et que K est un ensemble minimal.**

Résumé de la preuve : II) lien avec les films de savon

Afin d'avoir $\mu \geq \mathcal{H}^{N-1} \llcorner K$, il suffit de montrer que

$$\text{pour p.t. } x \in K \quad \limsup_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\omega_{N-1} r^{N-1}} \geq 1.$$

Résumé de la preuve : II) lien avec les films de savon

Afin d'avoir $\mu \geq \mathcal{H}^{N-1} \llcorner K$, il suffit de montrer que

$$\text{pour p.t. } x \in K \quad \limsup_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\omega_{N-1} r^{N-1}} \geq 1.$$

- On montre que la limite K est rectifiable.

Résumé de la preuve : II) lien avec les films de savon

Afin d'avoir $\mu \geq \mathcal{H}^{N-1} \llcorner K$, il suffit de montrer que

$$\text{pour p.t. } x \in K \quad \limsup_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\omega_{N-1} r^{N-1}} \geq 1.$$

- On montre que la limite K est rectifiable.
- Il suit que pour $\mathcal{H}^{N-1}$-p.t. $x \in K$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ et un hyperplan P passant par x tel que

$$K \cap B(x,r) \subset \{\, \mathrm{dist}(\cdot, P) \leq \varepsilon r \,\}.$$

Résumé de la preuve : II) lien avec les films de savon

Afin d'avoir $\mu \geq \mathcal{H}^{N-1} \llcorner K$, il suffit de montrer que

$$\text{pour p.t. } x \in K \quad \limsup_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\omega_{N-1} r^{N-1}} \geq 1.$$

- On montre que la limite K est rectifiable.
- Il suit que pour $\mathcal{H}^{N-1}$-p.t. $x \in K$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ et un hyperplan P passant par x tel que

$$K_i \cap B(x,r) \subset \{ \operatorname{dist}(\cdot, P) \leq \varepsilon r \} \quad \text{et} \quad \omega_p^i(x,r) \leq \varepsilon.$$

pour i assez grand.

Résumé de la preuve : II) lien avec les films de savon

Afin d'avoir $\mu \geq \mathcal{H}^{N-1} \llcorner K$, il suffit de montrer que

$$\text{pour p.t. } x \in K \quad \limsup_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\omega_{N-1} r^{N-1}} \geq 1.$$

- On montre que la limite K est rectifiable.
- Il suit que pour $\mathcal{H}^{N-1}$-p.t. $x \in K$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ et un hyperplan P passant par x tel que

$$K_i \cap B(x,r) \subset \{ \operatorname{dist}(\cdot, P) \leq \varepsilon r \} \quad \text{et} \quad \omega_p^i(x,r) \leq \varepsilon.$$

  pour i assez grand.
- **Est-ce que cela implique**

$$\mathcal{H}^{N-1}(K_i \cap B(x,r)) \geq (1-\varepsilon)\omega_{N-1} r^{N-1} \quad ?$$

Résumé de la preuve : III) une estimation directe par slicing

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0$ tel que...

Lemma
Soit (u, K) un minimiseur local de Griffith. Pour tout boule $B(x, r)$ avec $x \in K$, si

$$K \cap B(x, r) \subset \{\, \mathrm{dist}(\cdot, P) \leq \varepsilon_1 r \,\} \quad \textit{and} \quad \omega_p(x, r) \leq \varepsilon_1,$$

alors

$$\mathcal{H}^{N-1}(K \cap B(x, r)) \geq (1 - \varepsilon)\omega_{N-1} r^{N-1},$$

où ω_{N-1} est l'aire du disque unité de dimension $N - 1$.

Résumé de la preuve : III) une estimation directe par slicing

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0$ tel que...

Lemma
Soit (u, K) un minimiseur local de Griffith. Pour tout boule $B(x, r)$ avec $x \in K$, si

$$K \cap B(x, r) \subset \{ \operatorname{dist}(\cdot, P) \leq \varepsilon_1 r \} \quad \textit{and} \quad \omega_p(x, r) \leq \varepsilon_1,$$

alors

$$\mathcal{H}^{N-1}(K \cap B(x, r)) \geq (1 - \varepsilon)\omega_{N-1} r^{N-1},$$

où ω_{N-1} est l'aire du disque unité de dimension $N - 1$.

Démonstration : Argument de slicing en utilisant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u(x + te_N) \cdot e_N] = (e(u)(x + te_N)e_N) \cdot e_N.$$